

A szóbanforgó egyenlet $\cos^2 \alpha = z$ helyettesítéssel

$$(1) \quad f(z) \equiv 4c^4(h^2 + d^2)z^2 - 4c^2d^2(gh + c^2)z + g^2d^4 = 0,$$

ahol g, h, c, d pozitív értékeket jelentenek. Az egyenlet discriminánsával megállapítottuk, hogy ezen egyenlet gyökei valósak, ha

$$(2) \quad d \leq \frac{c}{g} \sqrt{c^2 + 2gh}.$$

Ki kell mutatnunk, hogy ekkor az $f(z)$ függvény zérushelyei 0 és 1 között vannak ($z = \cos^2 \alpha > 0$). $f(z)$ a z -nek oly másodfokú függvénye, melyben z^2 együttthatója pozitív; tehát zérus helyei 0 és 1 között vannak, ha

$$(3) \quad f(0) > 0, \quad f(1) > 0 \quad \text{és} \quad 0 < \frac{z_1 + z_2}{2} < 1 \dots$$

ahol z_1 és z_2 az $f(z) = 0$ egyenlet gyökei, tehát

$$(4) \quad \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{4c^2d^2(gh + c^2)}{2 \cdot 4c^4(h^2 + d^2)} = \frac{d^2(gh + c^2)}{2c^2(h^2 + d^2)} \dots$$

Vizsgáljuk meg tehát, fennállanak-e ezen feltételek? Valóban $f(0) = g^2d^4 > 0$ és

$$f(1) = 4c^4(h^2 + d^2) - 4c^2d^2(gh + c^2) + g^2d^4 = (2c^2h - gd^2)^2 > 0$$

$$\frac{d^2(gh + c^2)}{2c^2(h^2 + d^2)} < 1 \quad \text{ha} \quad d^2(gh + c^2) < 2c^2(h^2 + d^2),$$

ill.

$$(5) \quad d^2gh < 2c^2h^2 + c^2d^2 \dots$$

Ha $gh < c^2$, az 5) egyenlőtlenség mindenkor fennáll. Ha azonban $gh > c^2$, akkor kell, hogy

$$(5a) \quad d^2(gh - c^2) < 2c^2h^2 \quad \text{azaz} \quad d^2 < \frac{2c^2h^2}{gh - c^2} \dots^1$$

legyen. Vegyük már most figyelembe, hogy d^2 legnagyobb értéke 2) szerint: $\frac{c^2}{g^2}(c^2 + 2gh)$; azonban

$$\frac{c^2}{g^2}(c^2 + 2gh) < \frac{2c^2h^2}{gh - c^2}, \quad \text{mert} \quad (c^2 + 2gh)(gh - c^2) < 2h^2g^2.$$

Ugyanis, végrehajtva a kijelölt műveleteket, keletkezik:

$$-(c^4 + 2c^2gh) < 0.$$

Ez pedig fennáll. Ha már most d^2 legnagyobb értéke is eleget tesz az 5a)-nak, kisebb értékei még inkább. Eszerint a 3) alatti feltételek mindenkor ki vannak elégítve és így

$$0 < z_1 < 1, \quad 0 < z_2 < 1.$$

¹ $gh - c^2 > 0$; az egyenlőség tartalma nem változik meg ha osztunk vele.