I. Megoldás. Ha a négyjegyű szám első két jegyével alkotott szám x, a második két jegyével pedig y, akkor a feladat követelménye, hogy

$$100x + y = (x+y)^2 \quad \text{ill.} \quad (x+y)^2 - (x+y) = 99x$$

legyen. Legyen $(x+y) = z$, akkor

$$z^2 - z = 99x \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{z(z-1)}{99},$$

ahol $z \leqq 99$. Ha ugyanis $z \geqq 100$ lenne, akkor $x \geqq 100$; ez pedig lehetetlen, mert x kétjegyű szám.

I. x egész szám, ha $z = 99$; ekkor $x = 98$. Minthogy pedig $z = x + y = 99$, azért $y = 01$. Valóban $9801 = (98+01)^2 = 99^2$.

II. x egész szám, ha 99 a $z(z-1)$ szorzat osztója. z és $z-1$ egyidőben nem lehet 3 többszöröse. Kell, hogy vagy z vagy $z-1$ legyen 9 többszöröse. Ha már most

$$z = 9u, \quad \text{akkor} \quad z - 1 - 11v.$$

Keresnünk kell a $9u - 1 = 11v$ határozatlan egyenlet pozitív egész számú megoldásait, úgy, hogy $z < 99$ legyen.[1] Tehát

$$9u = 11v + 1, \quad u = v + \frac{2v+1}{9} = v + w, \quad \text{ha} \quad \frac{2v+1}{9} = w.$$

$$\text{Innen} \quad v = \frac{9w-1}{2} = 4w + \frac{w-1}{2} = 4w + t, \quad \text{ha} \quad \frac{w-1}{2} = t, \text{ azaz}$$

$$w = 2t + 1.$$

Már most $u = v + w = 4w + t + w = 4(2t+1) + t + 2t + 1 = 11t + 5$ és így $z = 99t + 45$.

Feltételünk szerint $z < 99$, tehát csak $t = 0$ lehetséges, azaz

$$z = x + y = 45, \quad z - 1 = 44, \quad x = \frac{45 \cdot 44}{99} = 20, \quad y = 25.$$

III. Ha pedig z a 11 többszöröse és $z-1$ a 9-é, akkor

$$z = 11u, \quad z - 1 = 9v, \quad \text{tehát} \quad 9v = 11u - 1.$$

[2]

$$\text{Innen} \quad v = u + \frac{2u-1}{9} = u + w, \quad \text{ha} \quad \frac{2u-1}{9} = w, \quad u = \frac{9w+1}{2}.$$

$$u = 4w + \frac{w+1}{9} = 4w + t, \quad \text{ha} \quad \frac{w+1}{2} = t \quad \text{ill.} \quad w = 2t - 1.$$

Így

$$v = u + w = 4w + t + w = 4(2t-1) + t + 2t - 1 = 11t - 5.$$

$$z = 9v + 1 = 99t - 45 + 1 = 99t - 44.$$

Minthogy $z \leqq 99$, csak $t = 1$ lehetséges, tehát

$$z = x + y = 55 \quad \text{és} \quad z - 1 = 54; \quad x = \frac{55 \cdot 54}{99} = 30, \quad y = 25.$$

Az adott tulajdonsága három négyjegyű számnak van meg:

$$3025 = (30+25)^2 = 55^2, \quad 2025 = (20+25)^2 = 45^2 \quad \text{és} \quad 9801 = 99^2.$$

II. Megoldás. A megoldások egy része a

$$100x + y = (x+y)^2$$

egyenletet

$$x^2 + 2(y-50)x + (y^2 - y) = 0$$

alakra hozva, x szerint megoldja és az

$$x = 50 - y \pm \sqrt{2500 - 99y}$$

kifejezésben szereplő discriminánshoz fűzi a továbbiakat, amelyek szerint kell, hogy

$$2500 - 99y = k^2 \quad \text{azaz} \quad y = \frac{2500 - k^2}{99} = \frac{(50+k)(50-k)}{99}$$

[1]Ha felírjuk 9 többszöröseit 18-tól 90-ig, megtaláljuk azt, mely 11 többszörösénél 1-gyel nagyobb.

[2]Felírhatjuk 9 többszöröseit 18-tól 90-ig; ezek között keressük azokat, melyek 11 többszörösénél 1.gyel kisebbek.

pozitív egész szám legyen. Az első követelmény: $k < 50$.

I. y egész szám, ha $50 + k < 100$ a 99 többszöröse, azaz $50 + k = 99$, $k = 49$ és így $y = 1$, tehát

$$x = 50 - 1 \pm 49, \quad \text{azaz} \quad x_1 = 98, \quad x_2 = 0.$$

Nyilván csak $x = 98$ felel meg.

II. $50 + k$ és $50 - k$ egyidőben nem lehet 3 többszöröse[3]; kell, hogy egyikük 9, a másik 11 többszöröse legyen, tehát

$$(50 + k) + (50 - k) = 9u + 11v = 100$$

egyenlet pozitív egész megoldásait kell keresnünk. Ilyen csak egy van: $u = 5$, $v = 5$.[4] Így

$$y = \frac{55 \cdot 45}{99} = 25 \quad \text{és} \quad x = 50 - 25 \pm 5,$$

azaz $x_1 = 30$, $x_2 = 20$.

[3] Ha $50 + k = 3m_1$ és $50 - k = 3m_2$, akkor $100 = 3(m_1 + m_2)$. Ez pedig nem állhat meg!

[4] Ugyanis $u = 16 - 11t$ és $v = 9t - 4$ alakú megoldásokból következik, hogy $\frac{4}{9} < t < \frac{16}{11}$, azaz csak $t = 1$ lehetséges.