Minthogy az oldallapok derékszögű háromszögek, területük aránya a befogók szorzatának arányával egyenlő, azaz

$$t_A : t_B : t_C = (OB \cdot OC) : (OC \cdot OA) : (OA \cdot OB).$$

A befogók szorzatait az $OA \cdot OB \cdot OC$ szorzattal osztva, keletkezik:

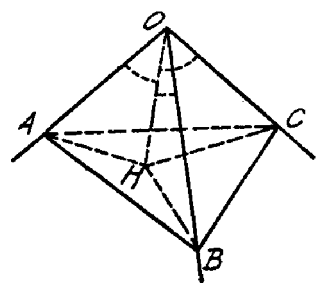
$$t_A : t_B : t_C = \frac{1}{OA} : \frac{1}{OB} : \frac{1}{OC} \ldots \tag{1}$$

Az O pontnak az ABC síkon való vetülete H, az $ABC\,\Delta$ magassági pontja.[1] Minthogy $OH \perp [ABC]$ és $OA \perp [OBC]$, az $AOH\sphericalangle$ a BC élben találkozó síkok lapszögét méri; ha ennek jele L_A, akkor az OAH derékszögű háromszögben

$$OA = \frac{OH}{\cos L_A} \quad \text{és hasonlóan} \quad OB = \frac{OH}{\cos L_B}, \quad OC = \frac{OH}{\cos L_C}.$$

Eszerint

$$t_A : t_B : t_C = \cos L_A : \cos L_B : \cos L_C \ldots \tag{2}$$



Az O-nál levő triéder gömbi feleslege:

$$3 \cdot 90^\circ - 180^\circ = 90^\circ.$$

Az A csúcshoz tartozó triéder lapszögei: L_B, L_C és az OA élben találkozó síkoké 90°, tehát

$$\alpha = L_B + L_C + 90^\circ - 180^\circ = L_B + L_C - 90^\circ.$$

Hasonlóan:

$$\beta = L_C + L_A - 90^\circ \quad \text{és} \quad \gamma = L_A + L_B - 90^\circ.$$

A feladatban foglalt defínició szerint

$$2\sigma = \alpha + \beta + \gamma + 90^\circ = 2(L_A + L_B + L_C) - 180^\circ$$
$$\sigma = L_A + L_B + L_C - 90^\circ$$

és igy

$$\sigma - \alpha = L_A, \quad \sigma - \beta = L_B, \quad \sigma - \gamma = L_C.$$

Tekintettel ezen összefüggésekre, 2)-ből keletkezik:

$$t_A : t_B : t_C = \cos(\sigma - \alpha) : \cos(\sigma - \beta) : \cos(\sigma - \gamma).$$

Weiss Alfréd (Bólyai g. VII. o. Bp. V.)

[1] L. pl. XIII. évf. 4. számában az 1259. feladatot. (1936/12. 118. old. – a szerk.)