

Legyen $OP = QM = x$, $OQ = PM = y$. A feladat követelménye:

$$(1) \quad xy = a(x + y) \dots$$

M a kör pontja tehát

$$(2) \quad x^2 + y^2 = R^2 \dots$$

Ezen egyenletrendszer megoldása céljából írjuk:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2a(x + y).$$

Ha már most $x + y = u$, akkor 2) szerint

$$(3) \quad u^2 - 2au - R^2 = 0 \dots$$

Ezen egyenletnek mindig két valós, ellenkező előjelű gyöke van; közülük csak a pozitívet vehetjük figyelembe, úgy hogy

$$(4) \quad x + y = u = a + \sqrt{a^2 + R^2} \dots$$

1)-ből pedig

$$(5) \quad xy = v = au = a^2 + a\sqrt{a^2 + R^2} \dots$$

Eszerint x és y a

$$(6) \quad z^2 - uz + v = 0 \dots$$

egyenlet gyökei. Ezek valósak, ha $u^2 - 4v \geq 0$, ill.

$$u^2 - 4au \geq 0, \quad \text{tehát a} \quad u \geq 4a.$$

Ez bekövetkezik, ha

$$\sqrt{a^2 + R^2} \geq 3a, \quad \text{azaz} \quad R^2 \geq 8a^2.$$

A feladatnak megoldása eszerint akkor van, ha $2\sqrt{2}a \leq R$.

Alkalmazás. Ha $a = \frac{12}{35}R$, akkor

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{12}{35} < 1, \quad \text{mert } 24\sqrt{2} < 35. \quad \text{Ugyanis } 576 \cdot 2 = 1152 < 1225.$$

Most

$$a^2 + R^2 = R^2 \left(\frac{144}{1225} + 1 \right) = R^2 \frac{1369}{1225} = \left(\frac{37}{35}R \right)^2.$$

Így

$$\begin{aligned} x + y = u &= \frac{12}{35}R + \frac{37}{35}R = \frac{49}{35}R = \frac{7}{5}R. \\ xy = v = au &= \frac{7}{5} \cdot \frac{12}{35}R^2 = \frac{12}{25}R^2. \end{aligned}$$

x és y a

$$z^2 - \frac{7R}{5}z + \frac{12}{25}R^2 = 0$$

egyenlet gyökei. Innen $x = \frac{3}{5}R$, $y = \frac{4}{5}R$ vagy $x = \frac{4}{5}R$ és $y = \frac{3}{5}R$.