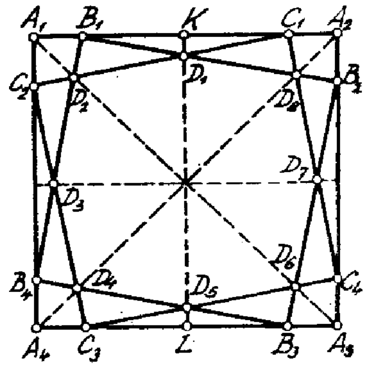
1^0. Tetszőleges x távolságot mérve fel a jelzett módon a négyzet oldalaira, a B_1B_2 és C_1C_2 távolságok szimmetrikusak a négyzet KL szimmetria tengelyére nézve. B_1B_4 és C_2C_1 pedig az A_1A_2 átlóra nézve s. í. t. Ebből következik, hogy a D_1, D_3, D_5, D_7 csúcsok a négyzet szembenfekvő oldalait felező szimmetria tengelyeken, a D_2, D_4, D_6, D_8 csúcsok az átlókon, mint a négyzet szimmetria tengelyein feküsznek.



Másrészt B_1B_4 és C_1C_4 is szimmetrikus a KL-re; ebből következik, hogy $B_1D_1 = C_1D_1$, $B_1D_2 = C_1D_8$ és $D_1D_2 = D_1D_8$ s. í. t. – az átlók menti szimmetriát is figyelembe véve – a $D_1D_2\dots D_8$ *összes oldalai egyenlők és*[1] *csúcsai a négyzet szimmetria-tengelyein feküsznek.*

Hogy ezen négyszög szabályos is legyen, szükséges még és elegendő, hogy mindegyik szöge 135°-ú, tehát ábránk szerint $2\alpha = 135^\circ$ ($\alpha = 67{,}5^\circ$) legyen, más szóval: a $D_1D_2\dots D_8$ nyolcszög oldalai felett fekvő derékszögű háromszögekben a szögek 45°-osak (tehát $B_1D_1 = B_1D_2 = C_2D_2 = C_2D_3 = \dots$ s. í. t) Minthogy $C_2A_1D_2\sphericalangle = 45^\circ$ és $A_1D_2C_2\sphericalangle = 67{,}5^\circ$, kell, hogy $A_1D_2C_2\sphericalangle = 67{,}5^\circ = \alpha_1$ legyen, azaz $A_1D_2 = A_1C_2 = x$. A $B_1C_1D_1$ egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek mindegyike 45° fele, azaz 22,5. Kössük össze már most pl. a C_1 pontot az O ponttal, a szabályos nyolcszög és a négyzet közös középpontjával. OC_1 a D_1D_8 alapon álló két egyenlőszárú háromszög – OD_1D_8 és $C_1D_1D_8\,\Delta$ – csúcsait köti össze, tehát felezi ezen csúcsainál fekvő szögeket. Ebből következik, hogy

$$A_1OC_1\sphericalangle = 45^\circ + 22{,}5^\circ = A_1C_1O\sphericalangle$$

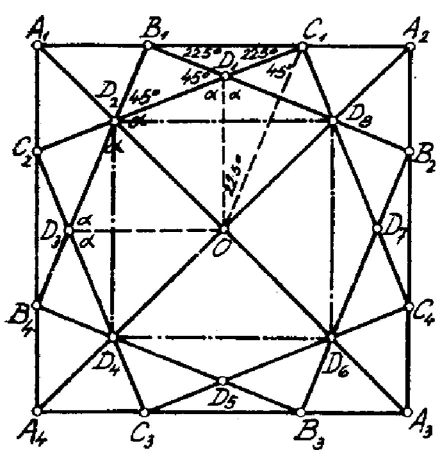
és így

$$A_1O = A_1C_1$$

azaz:

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2} = a - x, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{a}{2}\bigl(2-\sqrt{2}\bigr) = A_1A_2 - A_1O.$$

Ezzel meg is kaptuk az x, ill. a szab. $D_1\dots D_8$ sokszög szerkesztését!



2^0. Amint láttuk, $A_1D_2 = x$. Így $OD_2 = A_1O - x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{a}{2}\bigl(2-\sqrt{2}\bigr)$, tehát $OD_2 = a\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)$ és $a_8 = D_1D_2 = 2OD_2 \sin 22{,}5^\circ = 2a\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\sin 22{,}5^\circ$.

A szabályos nyolcszög apothemája $h = OD_2 \cos 22{,}5^\circ = a\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\cos 22{,}5^\circ$.

[1] A szögei azonban csak váltakozva egyenlők. Két szomszédos szög összege 270°.

Eszerint a $D_1D_2\dots D_8$ sokszög kerülete[2], ill, területe

$$k_1=16a\left(\sqrt{2}-1\right)\sin 22{,}5^\circ=16a\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=8a\sqrt{10-7\sqrt{2}}$$

$$t_1=8\cdot\frac{D_1D_2}{2}h=4\cdot 2a\left(\sqrt{2}-1\right)\sin 22{,}5^\circ\cdot a\left(\sqrt{2}-1\right)\cos 22{,}5^\circ=4a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\sin 45^\circ=$$
$$=2a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=a^2\left(6\sqrt{2}-8\right).$$

A nyolcszögnek az A_1A_3 és A_2A_4 átlókon fekvő csúcsai egy négyzetet határoznak meg, $D_2D_4D_6D_8$-at. Ezen négyzet félátlója $OD_2=a\left(\sqrt{2}-1\right)$ és így ezen négyzet oldala, pl.

$$D_2D_4=a'=a\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}=a\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Ebből következik, hogy ezen négyzetbe, az előbbihez hasonló módon szerkesztett szabályos nyolcszög oldala az előbbi-nyolcszög oldalának $\left(2-\sqrt{2}\right)$-szerese s. i. t. Azaz: a feladatban körülírt módon keletkező szabályos nyolcszögek kerületei oly mértani haladvány tagjai, melynek hányadosa $q=2-\sqrt{2}$, területei pedig oly mértani haladványt alkotnak, melynek hányadosa $q'=\left(2-\sqrt{2}\right)^2=6-4\sqrt{2}$. Látható, hogy $0<q<1$ és $0<q'<1$; tehát mindakét végtelen mértani sor összetartó.

Eszerint a végtelen sok nyolcszög kerületének összege :

$$K=\frac{k_1}{1-q}=\frac{8a\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{1-2+\sqrt{2}}=\frac{8a\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}=\frac{8a\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}=8a\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

A területek összege pedig

$$T=\frac{t_1}{1-q'}=\frac{a^2\left(6\sqrt{2}-8\right)}{1-6+4\sqrt{2}}=\frac{a^2\left(6\sqrt{2}-8\right)}{4\sqrt{2}-5}=\frac{a^2\left(6\sqrt{2}-8\right)\left(4\sqrt{2}+5\right)}{32-25}=\frac{a^2\left(8-2\sqrt{2}\right)}{7}.$$

Nagy Elemér (Ciszterci Szent Imre g. VII., Bp. XI.)

---

[2] $\sin 22{,}5^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ és $\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(2-\sqrt{2}\right)=\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)=10-7\sqrt{2}$. Tehát $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{10-7\sqrt{2}}$.