Ezen feladatot – a II. évf. 139. oldalán – többféleképpen oldottuk meg. Tekintettel erre, most csak az idézett helyen található megoldásokon túlmenő megállapításokra szorítkozunk.

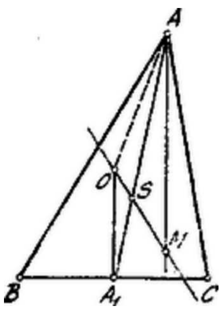
I. A háromszög megadott csúcsa legyen A, súlypontja S és magassági pontja M.

Ha ezen pontok egy egyenesbe esnek, akkor a háromszög egyenlőszárú. Ha $M \equiv S$, akkor a háromszög egyenlőoldalú. Ha $M \equiv A$, akkor a háromszög derékszögű, azonban a feladat határozatlan, végtelen sok megoldása van.

Ugyanis az AS meghosszabbítására felmérve $SO = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{2}AS$ távolságot, az O középpontú és OA sugarú körbe írt derékszögű háromszögek mind megfelelnek, melyekben A a derékszög csúcsa, az átfogó bármelyik átmérő.

Ha az $AMS\sphericalangle$ derékszög, akkor a feladatnak nem lehet megoldása.

(Szittyai D., Vajda J.)



II. A háromszög köré írt kör középpontja az Euler-féle MS egyenesen fekszik úgy, hogy $SO = \frac{1}{2}MS$ (az M, S, O sorrendben). Az O vetülete BC-n A_1, a BC felezőpontja. Tudjuk azt, hogy $OA_1 = \frac{1}{2}AM$. (L. pl. a 36. feladatot, a II. évf. 17. o.)

A szerkesztés lehetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy az O körül OA sugárral leírt kör a BC egyenest[1] két pontban messe, tehát $OA_1 < OC$, ill. $\frac{1}{2}AM < AO$, vagyis $AM < 2AO$, azaz AM *a háromszög köré írt kör átmérőjénél kisebb tartozik lenni.*

Az $AMS\,\Delta$-ben:

$$AS^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2 - 2AM \cdot MS \cos\widehat{AMS}.$$

Az $AMO\,\Delta$-ben:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AM}^2 + \left(\frac{3}{2}MS\right)^2 - 2AM \cdot \frac{3}{2}MS \cdot \cos\widehat{AMS}.$$

Ezen két egyenletből

$$3\overline{AS}^2 - 2\overline{AO}^2 = \overline{AM}^2 - \frac{3}{2}\overline{MS}^2$$

tehát $\overline{AO}^2 = \frac{3}{2}\overline{AS}^2 + \frac{3}{4}\overline{MS}^2 - \frac{1}{2}\overline{AM}^2$.

Az $AM < 2AO$, ill. $\overline{AM}^2 < 4\overline{AO}^2$ feltétel eszerint

$$\overline{AM}^2 < 2\overline{AS}^2 + \overline{MS}^2$$

alakban írva, az $AMS\,\Delta$ oldalaira vonatkozik.[2]

Harsányi János, ág ev. g. VIII. o. Bp.

[1] BC tartója az A_1 ponton át AM-re merőlegesen vont egyenes.

[2] Ezen feltétel mindig fennáll, ha az $ASM\sphericalangle \leq 90°$.
Ha $ASM\sphericalangle > 90°$, akkor $\overline{AS}^2 + \overline{MS}^2 < \overline{AM}^2 < 2\overline{AS}^2 + \overline{MS}^2$.
Most

$$\overline{AM}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{MS}^2 + 2\overline{AS} \cdot \overline{MS}\cos(180° - ASM) < 2\overline{AS}^2 + \overline{MS}^2,$$

ha

$$AS < 2MS\cos(180° - ASM)$$

azaz: AS nagyobb, mint az MS vonaldarabnak az AS egyenesen való kétszeres vetülete.