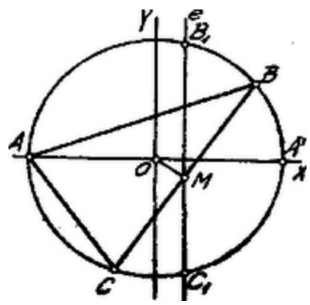
1°. Koordinátarendszerünk kezdőpontja a kör középpontja legyen és az X-tengely az A ponton menjen keresztül; az A koordinátái; $(-r,\,0)$ és a kör egyenlete $x^2+y^2=r^2$.



A B pont koordinátái legyenek $(x_1,\,y_1)$, a C ponté $(x_2,\,y_2)$. Ekkor

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(x_1+r)^2+y_1^2+(x_2+r)^2+y_2^2=k^2$$
$$(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+2r(x_1+x_2)+2r^2=k^2$$

Minthogy a B, C pontok a körön vannak,

$$x_1^2+y_1^2=r^2,\quad x_2^2+y_2^2=r^2$$

és így

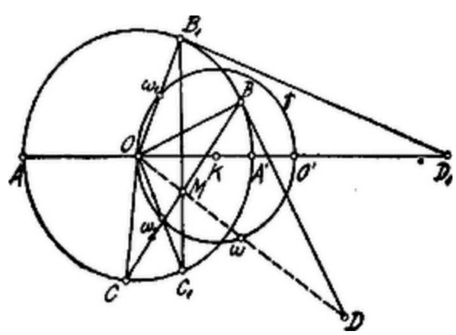
$$x_1+x_2=\frac{k^2-4r^2}{2r}.$$

A BC távolság M felezőpontjának abscissája

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k^2-4r^2}{4r},$$

azaz állandó: az M pont az X-tengelyre merőleges e egyenes pontja. Azonban az M pont ezen egyenesnek csak a körön belül eső részét, a B_1C_1 húrt írja le: az M pont mértani helye a B_1C_1 húr.[1]

2°. Ismeretes, hogy a parabola gyújtópontjából a parabola valamely érintőjére bocsátott merőleges talppontja a csúcsérintőn fekszik. Eszerint a BC egyenesek oly parabola érintői, amelynek gyújtópontja a kör O pontja és csúcsérintője az e egyenes, tehát ezen parabola, ill. ennek egy íve a BC egyenesek burkolója. A szóbanforgó ív végpontjai a B_1, ill. C_1 pontokból húzott érintők érintéspontjai.



3°. Az $OBC\,\Delta$ köré írt kör középpontja legyen ω és ezen körben az O-val diametrálisan szembenfekvő pont D. Ekkor az $OCD\,\Delta$ C-nél derékszögű és ezért $\overline{OD}\cdot\overline{OM}=\overline{OC}^2=r^2$. Azonban $OD=2O\omega$, tehát $O\omega\cdot OM=\dfrac{r^2}{2}$. Ezen

[1] Az M pont B_1-be, ill. C_1-be esik, ha B és C összeesnek a B_1, ill. C_1 pontban. A k^2 ugyanazon értéke mellett a B és C pontok feküdhetnek az AA' átmérő ugyanazon és ellenkező oldalán.

Minthogy AB és AC a kör húrjai, egyik sem lehet $2r$-nél nagyobb, tehát

$$k^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\le 4r^2+4r^2,\quad k^2\le 8r^2.$$

Ha $k^2=8r^2$, akkor csak $AB=AC=2r$ lehetséges. A B és C pontok az A' pontba esnek, ugyanide esik az M pont is. $(B_1C_1=0,\ x=r)$.

Ha $4r^2<k^2<8r^2$, akkor az e egyenes O és A' között metszi az AA' átmérőt.

Ha $k^2=4r^2$, akkor $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=4r^2$, az $ABC\,\Delta$-ek derékszögűek; a BC átfogó minden helyzetében az O ponton megy keresztül. Az M pont mértani helye az O pontba zsugorodik össze.

kapcsolat azt fejezi ki, hogy ω az M inverz pontja az O pólusra nézve; az inverzió hatványa $\frac{r^2}{2}$. Eszerint az ω az e egyenes inverz alakzatjának, tehát oly γ körnek a pontja, mely O-n megy keresztül és középpontja az e-re merőleges OX egyenesen fekszik. Mivel azonban az M pont mértani helye az e egyenes B_1C_1 darabja, az inverz körnek is csak azon íve lesz az ω mértani helye, melyet az OB_1 és OC_1 egyenesek metszenek ki belőle (a γ körnek $\omega_1O'\omega_2$ íve).

A γ kör OX egyenesen fekvő átmérőjének egyik végpontja O, a másik végpontját az O körhöz, a B_1 pontjában húzott érintő határozza meg.

Ha ezen érintő OX-t a D_1-ben metszi, akkor OD_1 felezőpontja lesz a γ átmérőjének másik végpontja, O'.

Komlós János (Gr. Széchenyi I. gyakorló r. VIII. o. Pécs)