

**I. Megoldás.** a) A kihúzott számokat jelöljük  $x_1, x_2, x_3$ . Ha ezeket egyszerre húzzuk ki, akkor nem lehetnek közöttük egyenlők. Ezeknek tehát két feltételt kell kielégíteniük:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 180 \dots$$

$$(2) \quad \text{és } 0 < x_1 < x_2 < x_3 \leq 90^\circ \dots$$

Vizsgáljuk meg, hány értékcsoport felel meg ezen követelményeknek?

2) szerint bármelyik  $x < 91$ ; tehát léteznek olyan  $Z_1, Z_2, Z_3$  pozitív egész számok, amelyekre nézve

$$Z_1 = 91 - x_3, \quad Z_2 = 91 - x_2, \quad Z_3 = 91 - x_1,$$

ill.

$$(3) \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 = 273 - (x_1 + x_2 + x_3) = 93 \dots$$

azonban ugyancsak 2) alapján kell, hogy

$$(4) \quad 0 < Z_1 < Z_2 < Z_3 \leq 90 \dots$$

legyen. Ha tekintetbe vesszük, hogy  $Z_{1\min} = 1, Z_{2\min} = 2$ , akkor a  $Z_3 \leq 90^\circ$  korlátozás összhangban van a 3) egyenlet követelményével és nem változtatja meg a 3) egyenlet megoldásainak számát, úgy hogy ezt nem kell külön kiemelniük.

Mivel minden  $Z$ -hez tartozik egy olyan  $x$ , mely eleget tesz az 1) és 2) feltételeknek, azért elegendő, ha keressük a

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 93$$

egyenlet pozitív egész megoldásainak számát, úgy hogy

$$0 < Z_1 < Z_2 < Z_3.$$

Ezt a feladatot a XII. évf. 1184. feladatában oldottuk meg (XII. évf. 232. o.—1936/4. 232. old.). Eszerint a megoldások száma:<sup>1</sup>

$$\frac{1}{6} \left\{ \binom{93-1}{2} - 3 \left[ \frac{93-1}{2} \right] + 2 \left[ \frac{93}{2} \right] - 2 \left[ \frac{93-1}{3} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ \binom{92}{2} - 3 \cdot 46 + 2 \cdot 31 - 2 \cdot 30 \right\} = 675.$$

Ugyanennyi megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 = 180 \quad (\text{ha } 0 < x_1 < x_2 < x_3 \leq 90)$$

egyenletnek is.

Ha nem vagyunk tekintettel a sorrendre, akkor a kiszámítandó valószínűség szempontjából a kedvező esetek száma 675, míg a lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotott ismétlés nélküli harmadoszt. kombinációk száma,  $\binom{90}{3}$ .

Eszerint

$$v_1 = \frac{675}{\binom{90}{3}} = \frac{675 \cdot 3!}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{45}{7832} = 0,005745.$$

Ha a sorrendre is tekintettel vagyunk, akkor a kedvező esetek száma:  $675 \cdot 3!$  A lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotott ismétlés nélküli harmadoszt. variációk száma  $\left(\frac{90}{3}\right) 3!$  A valószínűség értéke most is az, mint előbb.

b) Ha a kihúzott lapot visszatesszük, akkor a kihúzottak között az 1) feltételnek megfelelőleg 45, 46, ... 59, 61, ... 89 számok kétszer is előfordulhatnak, a 60 háromszor is, azaz 45 esetben lehet ismétlés; a kedvező esetek száma, ha nem vagyunk tekintettel a sorrendre  $675 + 45 = 720$ . A lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotható ismétléses harmadoszt. kombinációk száma, azaz  $\binom{92}{3}$ . A keresett valószínűség

$$v_2 = \frac{720}{\binom{92}{3}} = \frac{720 \cdot 3!}{92 \cdot 91 \cdot 90} = \frac{70}{92 \cdot 91 \cdot 15} = \frac{12}{91 \cdot 23} = \frac{12}{2093} = 0,005733 \dots$$

Ha tekintettel vagyunk a sorrendre is, akkor a kedvező esetek száma:

$$675 \cdot 3! + 44 \frac{3!}{2!} + 1 = 4183.$$

<sup>1</sup>  $\left[ \frac{k}{l} \right]$  jel a  $\frac{k}{l}$  törtben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

A lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotható ismétléses variációk száma t. i.  $90^3$ . Most

$$v'_2 = \frac{4183}{90^3} = 0,000573 \dots$$

Vajda József (Faludi Ferenc rg. VIII. o. Szombathely).

*Jegyzet.* Ezen különben dicséretreméltó megoldásról feltételezhetjük, hogy a versenyen aligha jön létre. Hogy lássuk, milyen megoldás az, amit a versenyen is ki lehet hozni, közöljük a következő megoldást is. Ebben azonban csak az *a*) kérdésre szorítkozunk, feltételezve azt, hogy a kihúzott számok sorrendjére nem vagyunk figyelemmel.

**II. Megoldás.** Jelentsék az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  egész számok a háromszög szögeit úgy, hogy  $0 < x < y < z \leq 90^\circ$ . Ekkor  $x + y + z = 180$ .

Mint hogy  $y < z \leq 90$ , azért  $x + 2y < 180$ , de  $x + y \geq 90$ . Ezen feltételeket szem előtt tartva, a következő kedvező esetekhez jutunk:

$x = 1$ ;	$y$ lehetséges értékei :	89
$x = 2$ ;	„ „ „ :	88
$x = 3$ ;	„ „ „ :	87, 88
$x = 4$ ;	„ „ „ :	86, 87
$x = 5$ ;	„ „ „ :	85, 86, 87
$x = 6$ ;	„ „ „ :	84, 85, 86
$x = 7$ ;	„ „ „ :	83, 84, 85, 86
...	...	
...	...	
$x = 43$ ;	$y$ lehetséges értékei :	47, 48, ... 67, 68 (22 eset)
$x = 44$ ;	„ „ „ :	46, 47, ... 66, 67 (22 „ )
$x = 45$ ;	„ „ „ :	46, 47, ... 66, 67 (22 „ )
$x = 46$ ;	„ „ „ :	47, 48, ... 66 (20 „ )
$x = 47$ ;	„ „ „ :	48, 49, ... 66 (19 „ )
$x = 48$ ;	„ „ „ :	49, 50, ... 65 (17 „ )
...	...	
...	...	
$x = 57$ ;	$y$ lehetséges értékei :	58, 59, 60, 61
$x = 58$ ;	„ „ „ :	59, 60
$x = 59$ ;	„ „ „ :	60.

( $x = 60$  már nem lehetséges  $y = 61$ ,  $z = 62$  miatt).

A feltételeknek megfelelő értékcsoportok száma megegyezik  $y$  lehetséges értékeinek számával és ez:

$$\begin{aligned} & 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 42 + 44 + 22 + 20 + 19 + 17 + 16 + \dots + 5 + 4 + 2 + 1 = \\ & = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 21 + 22) + 22 + (39 + 33 + 27 + \dots + 9 + 3) = \\ & = 506 + 22 + 147 = 675. \end{aligned}$$

A kedvező esetek száma eszerint 675.

A lehetséges esetek száma:  $\binom{90}{3}$  és  $v = \frac{675}{\binom{90}{3}} = \frac{45}{7832}$ .

Lóránd Endre (Br. Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp. VI.)

*Jegyzet.* Ezen – inkább intuitív – megoldást rendszerbe foglalja a következő.

**III. Megoldás.** A kedvező eseteket, számuknak könnyebb meghatározása végett, osszuk két csoportba. Az elsőbe helyezzük azokat, amelyekben az első (legkisebb) elem sorban 1, 2, ... 43, 44, a második csoportba azokat, amelyekben az első elem 45, 46, ... 89, 90.

1. Legyen tehát az első elem  $k$  úgy, hogy  $0 < k < 45$ . Az ehhez tartozó kedvező kombinációk közül a legalacsonyabb rangú:

$$k, \quad 90 - k, \quad 90.$$

(A második elem nem lehet kisebb, mint  $90 - k$ , mert akkor a harmadiknak  $90$ -nél nagyobbak kell lennie; ez pedig nem fordulhat elő.) A következő kedvező kombinációk

$$k, \quad 90 - k + 1, \quad 90 - 1$$

$$k, \quad 90 - k + 2, \quad 90 - 2.$$

⋮

A legmagasabb rangú kedvező kombináció

$$k, 90 - k + x, 90 - x$$

ahol

$$90 - k + x < 90 - x \quad \text{azaz} \quad x < \frac{k}{2}.$$

Tehát aszerint, amint  $k$  páros, vagy páratlan, legmagasabb rangú kedvező kombináció:

$$k, 90 - k + \left(\frac{k}{2} - 1\right), 90 - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \quad \text{ill.} \quad k, 90 - k + \frac{k-1}{2}, 90 - \frac{k-1}{2}.$$

Amint látjuk, adott  $k$  mellett  $x = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{k-1}{2}\right]$  szolgáltatják a kedvező eseteket. Ezeknek száma tehát  $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ .

$\left[\frac{k+1}{2}\right]$  értéke két egymásután következő páratlan és páros számra (1 és 2, 3 és 4 ... 43 és 44) ugyanakkora. Ha  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, 43, 44$ , akkor

$$\sum_{k=1}^{44} \left[\frac{k+1}{2}\right] = 2(1 + 2 + \dots + 22) = 2 \frac{1+22}{2} \cdot 22 = 506.$$

2. Legyen már most az első elem  $45 + l$ , ahol  $0 \leq l \leq 45$ . Az ehhez tartozó kedvező kombinációk:

$$\begin{aligned} &45 + l, \quad 45 + l + 1, \quad 90 - (2l + 1) \\ &45 + l, \quad 45 + l + 2, \quad 90 - (2l + 2). \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

A legmagasabb rangú  $45 + l, 45 + l + x, 90 - (2l + x)$

ahol azonban  $45 + l + x < 90 - (2l + x)$ , azaz  $0 < x < \frac{45 - 3l}{2}$ .

Ebből első sorban következik, hogy  $45 > 3l$ , tehát  $l < 15$ , azaz csak  $l = 0, 1, 2, \dots, 14$  lehetséges. (Az első elem legfeljebb 59.)

A legmagasabb rangú kombináció adott  $l$  mellett,

$$\begin{aligned} \text{ha } l \text{ páros} & \quad 45 + l, \quad 45 + l + \left(\frac{45 - 3l}{2} - \frac{1}{2}\right), \quad 90 - \left[2l + \left(\frac{45 - 3l}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] \\ \text{ha } l \text{ páratlan} & \quad 45 + l, \quad 45 + l + \left(\frac{45 - 3l}{2} - 1\right), \quad 90 - \left[2l + \left(\frac{45 - 3l}{2} - 1\right)\right] \end{aligned}$$

Eszerint,

$$\begin{aligned} \text{ha } l \text{ páros,} & \quad x = 1, 2, \dots, \frac{44 - 3l}{2}, \\ \text{ha } l \text{ páratlan,} & \quad x = 1, 2, \dots, \frac{43 - 3l}{2}. \end{aligned}$$

Ugyanennyi tehát a  $45 + l$  első elemhez tartozó kedvező kombinációk száma is.

Láttuk, hogy  $l = 0, 1, 2, \dots, 14$  lehet. Ezek közül  $l$  páros értékei: 0, 2, 4, ... 12, 14, összesen 8 eset, amelyben  $x = \frac{44 - 3l}{2}$ . Ezen  $x$  értékek számtani haladványt alkotnak, amelyben az első tag:  $\frac{44}{2}$ , az utolsó tag 1, tehát összegük

$$S_1 = 8 \cdot \frac{22 + 1}{2} = 4 \cdot 23 = 92.$$

$l$  páratlan értékei 1, 3, ..., 11, 13, összesen 7 eset, amelyben  $x = \frac{43 - 3l}{2}$ .

Ezen  $x$  értékek között az első tag:  $\frac{40}{2}$ , az utolsó tag  $\frac{4}{2}$ ; összegük

$$S_2 = 7 \frac{20 + 2}{2} = 77.$$

A kedvező kombinációk összes száma eszerint

$$506 + 92 + 77 = 675.$$