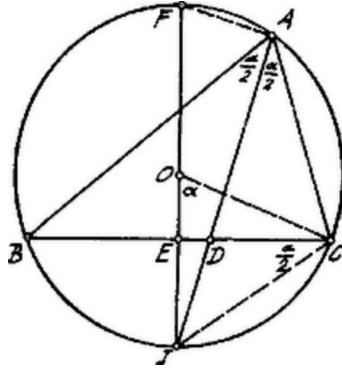


I. Megoldás. Számításunkat rendezzük be úgy, hogy ezzel egyszerre mind a következő feladatban kijelölt szerkesztést is elvégezhessük.

Adva lévén az a oldal és az α szög, megszerkesztjük a keresett háromszög köré írt kört, melynek a BC húrra merőleges átmérője, ábránk szerint $IF = 2OI = 2OC = \frac{a}{\sin \alpha}$.



Az $AD = l_\alpha$ szögfelező keresztülmegy a $\widehat{BC}$ ív I felezőpontján. Az $ADEF$ négyszögnek két szembenfekvő szöge, az A és E csúcsoknál, derékszög, tehát $ADEF$ hűrnégyszög. Ebből következik, hogy

$$(1) \quad \overline{IA} \cdot \overline{ID} = \overline{IE} \cdot \overline{IF} \dots$$

Adataink szerint

$$(2) \quad IA - ID = l_\alpha \dots$$

Az ICF derékszögű háromszögben

$$\overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IC}^2$$

tehát

$$(3) \quad \overline{IA} \cdot \overline{ID} = \overline{IC}^2 \dots$$

A 2) és 3) egyenletekből¹

$$(4) \quad ID = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \overline{IC}^2} - \frac{l}{2} \dots$$

$$(5) \quad IA = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \overline{IC}^2} + \frac{l}{2} \dots$$

ahol

$$IC = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Ezek után áttérhetünk az $AB = c$ és $AC = b$ oldalak kiszámítására.

Minthogy

az $ABI \Delta$ -ból:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AI} \cos \frac{\alpha}{2} = \overline{BI}^2$$

az $ACI \Delta$ -ból:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AI} \cos \frac{\alpha}{2} = \overline{CI}^2$$

továbbá $BI = CI$, nyilvánvaló, hogy $AB = c$ és $AC = b$ az

$$(6) \quad x^2 - 2x \cdot IA \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \overline{IA}^2 - \overline{IC}^2 = 0 \dots$$

egyenlet gyökei. Minthogy 5) szerint (és a geometriai jelentést is tekintve) $IA \geq IC$, a 6) egyenlet gyökei, ha valósak, egyszerre mind pozitívek, határesetben az egyik gyök zérus.

¹ A következőkben az l melletti α indexet a rövideg kedvéért elhagyjuk.

A gyökök valósak, ha

$$\overline{IA}^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (\overline{IA}^2 - \overline{IC}^2) = \overline{IC}^2 - \overline{IA}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0, \quad \text{ill.} \quad IC \geq IA \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Helyettesítve IC értékét: $\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \geq IA \sin \frac{\alpha}{2}$, tehát $IA \geq \frac{a}{\sin \alpha}$.

Valóban az IA húr kisebb tartozik lenni a kör átmérőjénél.
Már most:

$$\sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{l}{2} \leq \frac{a}{\sin \alpha},$$

$$\frac{l^2}{4} + \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \leq \left(\frac{a}{\sin \alpha} - \frac{l}{2} \right)^2, \quad \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{al}{\sin \alpha}.$$

Ezen egyenlőtlenséget l szerint megoldva

$$l \leq \frac{a}{\sin \alpha} - \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Azonban $\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = IE$, tehát $l \leq IF - IE$
azaz

$$l_{\alpha} \leq EF.$$

Ez a feltétele annak, hogy feladatunknak legyen megoldása. A 6) egyenletből

$$x = IA \cos \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \overline{IA}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

x egyik értéke b , a másik értéke c . Az IA értéke 5) alatt van megadva.

II. Megoldás. A cosinus-tétellel

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} \dots$$

Az l szögfelező által alkotott két háromszög területének összege az egész háromszög területével egyenlő, azaz

$$(2) \quad \frac{bl}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{cl}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{bc}{2} \sin \alpha \quad \text{és innen} \quad b + c = \frac{2bc}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \dots$$

2) alapján $b + c$ értékét 1)-be helyettesítve, keletkezik

$$(3) \quad 4b^2 c^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4bcl^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - a^2 l^2 = 0 \dots$$

Ezen (bc) -re másodfokú egyenletnek gyökei mindig valósak és ellenkező előjelűek; közülük csak a pozitív felel meg, úgy hogy

$$(4) \quad bc = \frac{l^2 \cos \frac{\alpha}{2} + l \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a^2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \dots$$

és így

$$(5) \quad b + c = l \cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a^2} \dots$$

5) szerint $b + c > a$. Már most b és c egy másodfokú egyenlet gyökei. A rövidség kedvéért legyen

$$b + c = u \quad \text{és} \quad bc = vu, \quad \text{ahol} \quad v = \frac{l}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

² Ezen kifejezés $l \leq \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$ alakra hozható.

Ekkor

$$b = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4vu}}{2}, \quad c = \frac{u \mp \sqrt{u^2 - 4vu}}{2}.$$

A gyökök valósak, ha $u \geq 4v$, azaz, ha

$$l \cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a^2} \geq \frac{2l}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{ill.} \quad \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a^2} \geq \frac{2l}{\cos \frac{\alpha}{2}} - l \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Minthogy $\frac{2l}{\cos \frac{\alpha}{2}} > l \cos \frac{\alpha}{2}$, négyzetre emelhetünk és így

$$l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a^2 \geq \frac{4l^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - 4l^2 + l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{vagyis} \quad 4l^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \leq a^2,$$

tehát

$$l \leq \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$$

a feltétele annak, hogy legyen valós megoldás.

Bencze József (Bencés g. VIII. o. Kőszeg).