

A szóbanforgó egyenlet megoldásának geometriai értelme az, hogy keressük az

- 1) $\dots y = \sqrt{2x^2 + 2x - m}$, az m értékével változó görbének és az
- 2) $\dots y = x - 2$ szilárd egyenesnek közös pontjait.

A 2) egyenes keresztülmegy az X -tengely $(2, 0)$ pontján és 45° -ú szög alatt hajlik az X -tengelyhez.

Az 1) görbe az

$$(3) \quad y^2 = 2x^2 + 2x - m \dots$$

hiperbolának az X -tengely feletti része. Ezen hiperbolának az X -tengely egyik *szimmetriatengelye*, amely valós tengely abban az esetben, ha a hiperbola metszi, azaz ha a

$$(4) \quad 2x^2 + 2x - m = 0 \dots$$

egyenletnek valós gyökei vannak. E gyökök valósak, ha

$$(5) \quad 4 + 8m \geq 0, \quad \text{ill.} \quad m \geq -\frac{1}{2} \dots$$

Vizsgáljuk tehát azon hiperbolákat, amelyekre nézve az 5) fennáll. A 3) egyenletet

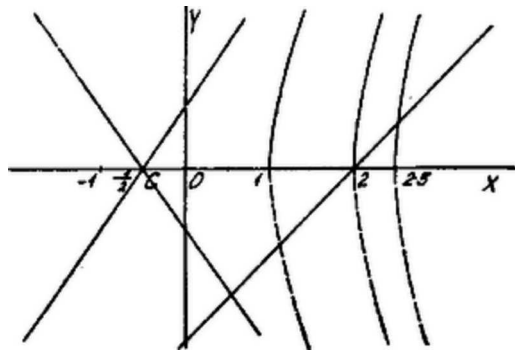
$$(6) \quad 2x^2 + 2x - y^2 = m, \quad \text{ill.} \quad 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = m + \frac{1}{2} \dots$$

alakban írva, kiolvashatjuk, hogy a hiperbola középpontja – az m bármely értéke mellett – az X -tengelyen fekszik, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$ koordinátákhoz tartozik. (Az ábrán C .)

Valamennyi hiperbolának közös aszimptotái vannak; ezek az

$$(7) \quad y = \left(x + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2} \quad \text{és} \quad y = -\left(x + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2} \dots$$

egyenesek. Ha $m = -\frac{1}{2}$, akkor a hiperbola éppen a 7) alatti egyenespárrá fajul.



A hiperboláknak azonban az X -tengelyen változó csúcspontjuk – és ennek megfelelőleg változó tengelyhosszuk – van, tehát változik az alakjuk. A csúcspontok koordinátáit a 4) egyenlet gyökei szolgáltatják. Ezeknek értéke:

$$(8) \quad x = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{1 + 2m}) \dots$$

Az $y = x - 2$ egyenes a hiperbola azon ágának X tengely feletti részét metszi, amelynek csúcspontja a középponttól jobbra van, tehát abszcisszája

$$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 2m}).$$

Mindaddig, amíg ezen abszcissa < 2 , az egyenes nem metszheti a hiperbola előbb meghatározott részét. Metszés-pontjuk akkor van,

ha $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 2m}) \geq 2$, tehát ha $m \geq 12$. (L. az 1275-ben).

$m = 12$ mellett a hiperbola csúcspontja az $(x = 2, y = 0)$ pont. Az egyenes itt metszi a görbét.

Ha $m > 12$, a metszéspont $x > 2$ abszcisszához tartozik.

Krisztonosich Jenő (Szent László rg. VII. o. Bp. X.)

Kiegészítés. Ha $-\frac{1}{2} \leq m < 12$, akkor a 2) egyenes a 6) hiperbola mindkét ágát az X -tengely alatt egy-egy pontban metszi.

Ha $m > 12$, akkor csak az egyik metszéspont van az X -tengely alatt (a hiperbola másik ágán).

Ha $m < -\frac{1}{2}$, ekkor az X tengely a hiperbola képzetes tengelye; a valós tengely az X -tengelyre merőleges az $(x = -\frac{1}{2}, y = 0)$ pontban. Ezen hiperbolának egyik ágát, az X tengely alattit, metszi a 2) egyenes két pontban.