

Az egyjegyű számok: 1, ... 9; ezek száma $9 = 9 \cdot 10^0$.

A kétjegyű számok: 10, ... 99; ezek száma $99 - 9 = 90 = 9 \cdot 10^1$.

A háromjegyű számok: 100, ... 999; ezek száma $999 - 99 = 900 = 9 \cdot 10^2$.

Az n jegyű számok: 10^{n-1} , ... $\overbrace{99, \dots}^n 9$; ezek száma $9 \cdot 10^{n-1}$.¹

Ezen számok felírásához szükséges számjegyek száma

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 + \dots + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} = \\ &= 9(1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + \dots + n \cdot 10^{n-1}). \end{aligned}$$

A zárójelben álló összeg az

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

kifejezés értéke, ha $x = 10$. Azonban

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} &= \frac{d}{dx}(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \\ &= \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Ha most $x = 10$, akkor

$$\begin{aligned} S &= 9 \frac{n \cdot 10^{n+1} - (n+1)10^n + 1}{9^2} = \frac{10n \cdot 10^n - (n+1)10^n + 1}{9} = \\ &= \frac{1}{9} [(9n-1)10^n + 1]. \end{aligned}$$

Nagy Elemér (Ciszterci Szent Imre rg. VII. o. Bp.).

A feladatot úgy is fel lehetett fogni, hogy 10^n jegyeinek számát is hozzászámítjuk az S összeghez. Többben ilyen értelemben oldották meg.

¹Az 1, 2, ..., 9 jegy mindegyikéhez hozzáfűzhetjük az 0, 1, 2, ..., 9, azaz 10 elem $(n-1)$ -ed oszt. ismétléses variációt.