

Ha a keresett számok x és y , akkor

$$x^2 + y^2 = 148392 = 2^3 \cdot 9^2 \cdot 229,$$

ahol 229 törzsszám. x és y megegyező paritásúak. Azonban nem lehetnek páratlanok, mert két páratlan szám négyzetének összege csak 2^1 -el osztható, 2^2 -ével nem. Tehát mindakettő páros, de nem lehet mindakettő 2^2 -ének többszöröse, mert négyzetük összege nem osztható 2^4 -vel. De az sem lehet, hogy az egyik legyen 2^2 , a másik 2^1 többszöröse, mert ha így lenne, akkor négyzetük összege 2^2 -nek lenne többszöröse és nem 2^3 -nak.

Ha x és y a 3-mal relatív prím, akkor négyzetük összege $3m + 2$ alakú szám lenne. Kell tehát, hogy úgy x , mint y egyik törztényezője 3 legyen. Mivel pedig

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 9m,$$

$\frac{x}{3}$ és $\frac{y}{3}$ is többszöröse 3-nak, tehát x és y többszörösei 9-nek. Eszerint

$$x = 2 \cdot 9a \quad \text{és} \quad y = 2 \cdot 9b, \quad a^2 + b^2 = 2 \cdot 229 = 458,$$

ahol a és b páratlan, relatív prímszámok. Páratlan számok négyzetében az egyesek helyén csak 1, 5, 9 állhat; minthogy két ilyen négyzetszám összegében az egyesek helyén 8 áll, mindakét négyzetszámban az egyesek helyén 9 áll, tehát a és b egyesei 3 vagy 7.

Azonban $a^2 < 458$ és $b^2 < 458$, így csak $3^2 = 9$, $13^2 = 169$, $7^2 = 49$ és $17^2 = 289$ jöhetnek figyelembe. ($23^2 > 458$). Valóban $17^2 + 13^2 = 458$.

A keresett számok: $2 \cdot 9 \cdot 13 = 234$ és $2 \cdot 9 \cdot 17 = 306$.

Sommer György és Grünfeld Sándor (Áll. Dobó István r. VI. o. Eger).