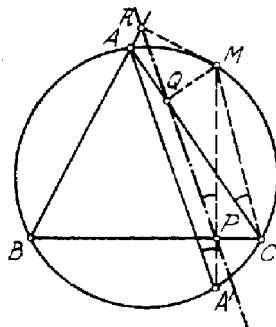


I. Megoldás. Az $ABC\Delta$ köré írt kör valamely M pontjából állítsunk merőlegeseket a háromszög oldalaira; ha ezeknek talppontjai P, Q, R , akkor ezek egy egyenesen, az M ponthoz tartozó Simson-egyenesen fekszenek.

Ha már most egy ilyen egyenes irányra nézve van megadva, meg kell határoznunk az $ABC\Delta$ köré írt körön a megfelelő M pontot.

Az adott irányt jelölje AA' . Az A' pontból az A -val szembenfekvő BC oldalra állított merőleges a háromszög köré írt kört a keresett M pontban metszi.



$MA' \perp BC$ és BC -t a P pontban metszi. Legyen továbbá $MQ \perp AC$. Ekkor P és Q már meghatározzák az M ponthoz tartozó Simson-egyenesét; csak azt kell kimutatnunk, hogy $PQ \parallel A'A$.

Az $MCPQ$ idom az MC átmérő fölött szerkesztett körben húrnégyszög, mert $\angle MPC = \angle MQC = 90^\circ$. Ebből következik, hogy

$$\angle MCQ = \angle MPQ,$$

mint ugyanazon íven álló kerületi szögek.

Másrészt az $ABC\Delta$ köré írt körben egyenlő kerületi szögek $\angle MCQ \equiv \angle MCA$ és $\angle MA'A$.

Eszerint

$$\angle MPQ = \angle MA'A \quad \text{és így} \quad PQ \parallel A'A.$$

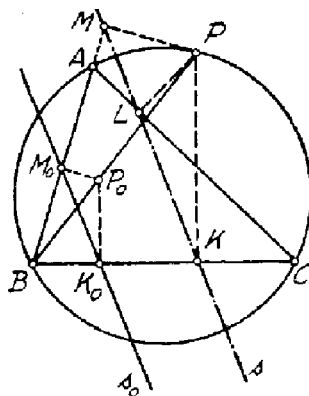
Q. e. d.

Czinczenheim József (Izr. rg. VIII. o. Debrecen).

Jegyzet. Önkényesnek tűnhetik fel, hogy a Simson-egyenes irányát olyannak vettük fel, hogy azzal A -ból párhuzamosat vonva, AA' -t, ez a $\widehat{BC}$ ívet B és C között metszi.

Ha AA' olyan irányú lenne, hogy A' a körön A és B , vagy A és C közé esnék, akkor a bizonyítás nem olyan egyszerű, mint a felvett esetben. Azonban az utóbb említett esetekben AA' -vel párhuzamost vonhatunk, vagy B -ből vagy C -ből és akkor ismét azon bizonyítási módot használhatjuk, amelyet láttunk.

II. Megoldás.



A megadott irányú s_0 egyenesnek az $ABC\Delta$ -nek BC ill AB oldalával való metszéspontja legyen K_0 , ill. M_0 . Ezen pontokban állítsunk merőlegest a háromszög illető oldalára; e két merőleges metszéspontja legyen P_0 . Ha most a BP_0 egyenes bármely P pontjából merőlegest állítunk a BC , ill. AB oldalra – K , ill. M talpponttal – akkor

$$BK_0P_0\Delta \sim BKP\Delta \quad \text{és} \quad BM_0P_0\Delta \sim BMP\Delta$$

Ezért

$$K_0P_0 : KP = BP_0 : BP$$

és

$$M_0P_0 : MP = BP_0 : BP$$

tehát

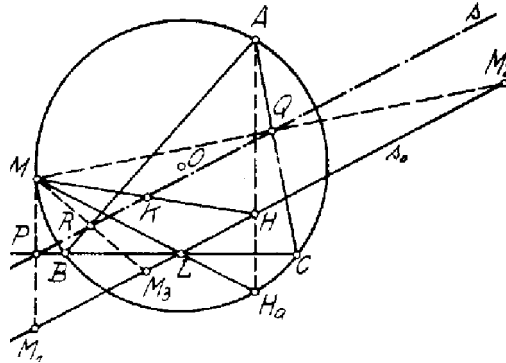
$$K_0P_0 : KP = M_0P_0 : MP.$$

Eszerint $K_0M_0P_0\Delta \sim KMP\Delta$ és ennek következtében $KM \equiv s \parallel K_0M_0 \equiv s_0$.

Ha P pont az $ABC\Delta$ köré írt körön fekszik, akkor s a P ponthoz tartozó Simson-egyenes és párhuzamos a megadott irányú s_0 egyenessel.

Komlós János (Gr. Széchenyi István gyakorló r. VII. o. Pécs).

III. Megoldás. Az $ABC\Delta$ köré írt kör tetszőleges pontja legyen M ; az ehhez tartozó Simson-egyenes s , melyet meghatároznak az M pontnak a BC ill. AB oldalon levő vetületei, P ill. R . Az M pontnak a háromszög oldalaira vonatkozó szimmetrikus pontjai M_1, M_2, M_3 egy s_0 egyenesen fekszenek, amely párhuzamos az s egyenessel.



Legyen H az $ABC\Delta$ magassági pontja. Ismeretes,¹ hogy az M ponthoz tartozó Simson egyenes (s) felezi az MH távolságot (a K pontban). Ebből következik, hogy s_0 keresztülmegy a H ponton.

A H pontnak a háromszög oldalaira vonatkozó szimmetrikus pontjai a háromszög köré írt körön fekszenek; a H pontnak a BC oldalra vonatkozó szimmetrikus pontja legyen H_a . Az s_0 egyenesnek és a BC oldalnak L metszéspontját kössük össze az M , ill. H_a ponttal. Ekkor a HLH_a és MLM_1 egyenlőszárú háromszögekben a BC egyenes felezi az L csúcsnál fekvő szögeket;² kell tehát, hogy M, L, H_a egy egyenesen fekszenek, azaz: az s_0 egyenesnek a BC -re vonatkozó szimmetrikusa keresztül megy az M ponton.³

Ezek alapján a szerkesztés a következő: az adott irányban a háromszög H magassági pontján keresztül húzzuk az s_0 egyenest; ennek a háromszög bármely oldalára vonatkozó szimmetrikusa, melyet a H pontnak az illető oldalra vonatkozó tükörképe határoz meg, a kört még azon M pontban metszi, amelyhez tartozó Simson-egyenes, $s \parallel s_0$.

Lóránd Endre (Br. Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp.)

¹ L. pl. Rátz L. Matematikai Gyakorlókönyv, II. r. 81. o. 561. feladat.

² BC egyenes közös szimmetriatengelye a két háromszögnek.

³ Ugyanez áll az s_0 egyenesnek a többi oldalakra vonatkozó szimmetrikusaira is.