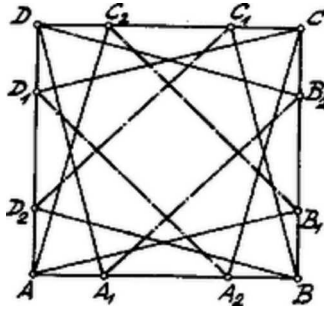


I. Megoldás. Induljunk ki az $ABCD$ négyzet valamely csúcsából, pl. az A -ból. Ha A a négyzetbe írt egyenlő oldalú háromszög csúcsa, a másik két csúcs az AC átlóra nézve szimmetrikus helyzetű úgy, hogy az egyik csúcs B_1 a BC , a másik C_2 a CD oldalon fekszik és

$$B_1AB \sphericalangle = C_2AD \sphericalangle = 15^\circ.$$

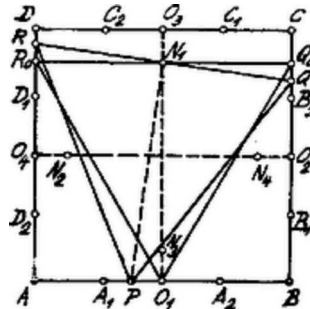
Ezért $AB_1 = AC_2$ és $B_1AC_2 \sphericalangle = 60^\circ$: az $AB_1C_2 \Delta$ egyenlő oldalú.



Ha már most minden csúcsból oly egyeneseket húzunk, amelyek a csúcsban találkozó oldalakkal 15° -ű szögeket zárnak be, az AB oldalon az A_1, A_2 , a BC oldalon a B_1, B_2 , a CD oldalon a C_1, C_2 és a DA oldalon a D_1, D_2 pontokhoz jutunk.

Már most mozogjon a P pont az AB oldalon és vizsgáljuk, hol helyezkednek a négyzetbe írt PQR egyenlő oldalú háromszög P, R csúcsai?

Amíg P az AA_1 közön fut végig, a Q pont a BC oldalon a B_1B_2 közön, az R csúcs a CD oldalon a C_2D közön halad végig. Ha P az A_1A_2 közön, akkor Q a B_2C , R a DD_1 közön, ha pedig P az A_2B közön, akkor Q a CC_1 és R a D_1D_2 közön fut végig. Hasonlóan áll a dolog, ha P a négyzet többi oldalán fut végig. A $PQR \Delta$ csúcsai közül kettő mindig a négyzet két szembe fekvő oldalán helyezkedik el.



Vegyük azon esetet, amidőn P az A_1A_2 köznek valamely pontja, még pedig legyen ez először az O_1 pont, az AB ill. A_1A_2 felezőpontja. A szóbanforgó egyenlő oldalú háromszög másik két csúcsának, Q_0 - és R_0 -nak szimmetrikusnak kell lenniük az AB -t merőlegesen felező egyenesre nézve, tehát $Q_0R_0 = AB$, azaz az O_1 -ből kiinduló szabályos háromszög oldalának a négyzet oldalával kell egyenlőnek lennie.

Q_0R_0 felezőpontja legyen N_1 . Ekkor O_1N_1 az $AB = a$ oldalú szabályos háromszög magassága, tehát $O_1N_1 = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ ¹.

Ha most P az A_1A_2 köz tetszőleges pontja és az onnan kiinduló szabályos háromszög másik két csúcsa Q és R , akkor QR felezőpontja ugyancsak az AB -t merőlegesen felező egyenesen fekszik.² Legyen ez N' ; kimutatjuk, hogy $N' \equiv N_1$. Húzzunk az N' ponton keresztül AB -vel párhuzamosat, $Q'R'$ -t; $Q'R' = a$. Mivel $PN' \perp QR$ és $O_1N' \perp Q'R'$, nyilván $PN'O_1 \Delta \sim RN'R' \Delta$ és így

$$PN' : O_1N' = RN' : R'N' \quad \text{azaz} \quad PQ \frac{\sqrt{3}}{2} : O_1N' = \frac{1}{2}PQ : \frac{1}{2}a$$

és innen

$$O_1N' = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tehát} \quad O_1N' = O_1N_1 \quad \text{ill.} \quad N' \equiv N_1.$$

¹ Az N_1 pont távolsága a CD oldaltól $N_1O_3 = Q_0C = \frac{B_2C}{2} = \frac{a \operatorname{tg} 15^\circ}{2} = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$. Eszerint

$$O_1N_1 + N_1O_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2} = a.$$

² Vegyük P -nek az AB -n, O_1 -re szimmetrikus pontját. Az ehhez tartozó $P'Q'R'$ szab. háromszög a $PQR \Delta$ -gel szimmetrikus az O_1O_3 -ra nézve; kell tehát, hogy QR és $Q'R'$ az O_1O_3 ugyanazon pontján menjenek keresztül.

Eszerint a változó PQR szabályos háromszög QR oldala, melynek P csúcsa az A_1A_2 közön van, keresztülmegy a szilárd N_1 ponton. Ebből tehát adódik a szerkesztés:

1) Ha P az A_1A_2 közben van, a PN_1 -re az N_1 pontban merőlegest állítunk és így megkapjuk a Q, R csúcsokat. A négyzet mindegyik oldalának felezőpontjához tartozik egy N pont úgy, hogy $O_iN_i = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($i = 1, 2, 3, 4$)-es ezen N pont a négyzetnek O_i -n áthaladó szimmetriatengelyén fekszik.

2) Ha P az AA_1 közben van, akkor PN_2 meghatározza a C_2D -n az R pontot és ennek megfelelőleg kapjuk Q -t a B_1B_2 közben.

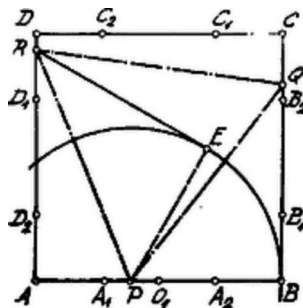
3) Ha P az A_2B közben van, akkor PN_4 határozza meg a CC_1 -n a Q pontot és ennek megfelelőleg az R pontot a D_1D_2 közben.

Harsányi János (ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

Jegyzet. A feladat eredeti szövegében sajtóhibával „kerületi pont” helyett „területi pont” állott. Utóbbi szövegezéssel mellett a szerkesztés vizsgálata jelentékenyen terjedelmesebb; minthogy a feladat kitűzője is csak „kerületi” pontokra gondolt, most az előadottakra szorítkozunk, jóllehet a közölt megoldás szerzője a sajtóhibás szövegnek is megfelelőleg dolgozott.

II. Megoldás. Az előbbi megoldás bevezetésében foglaltakat szem előtt tartva, legyen P az AB oldal valamely pontja az A_1A_2 közön; ekkor a Q a B_2C , az R a DD_1 köz valamely pontja lesz.

Ha a Q -pontot 60° -al elforgatjuk P körül – a pozitív irányban – akkor Q pont az R -be esik; ha a BC -oldalt P körül 60° -kal elforgatjuk, akkor a BC oldal Q pontjának a DA oldal R pontjába kell esnie.



A szerkesztés ezen alapon a következő: PB sugárral kört szerkesztünk és ezen kijelöljük az E pontot úgy, hogy $BE = 60^\circ$ legyen. Az E pontban a körhöz érintőt húzunk; ezen érintő helyzetét veszi fel a BC egyenes, ha P körül 60° -kal elforgattuk, amikor is B az E -be kerül. Ezen érintő a DA oldalt az R pontban metszi úgy, hogy PR lesz a P -ből kiinduló, a négyzetbe írt szab. háromszög oldala. A PR sugárral P -ből szerkesztett kör BC -t a Q pontban metszi.

Minthogy a $PBQ \Delta \cong PER \Delta^3$ és $PBQ \Delta$ 60° -os forgatással kerül a $PER \Delta$ helyzetébe, nyilván $QPR \sphericalangle = 60^\circ$ és így a $PQR \Delta$ egyenlőoldalú.

Tésy Gabriella (Szent Margit leányg. VIII. o. Bp. XI.)

³Két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög (90°) egyenlő