

Az

$$m(x + y) - xy = m$$

egyenletet

$$(1) \quad (x - m)(y - m) = m^2 - m \dots$$

alakban írhatjuk és ebből világosan kitűnik, hogy oly egyenlőszárú hiperbolával van dolgunk, melynek aszimptotái az

$$x = m, \quad y = m$$

egyenesek.¹ Ha $m = 0$, akkor a hiperbola egyenlete $xy = 0$, azaz a hiperbola a koordináta-rendszer tengelyeiből álló egyenespárrá fajul. Ha $m = 1$, akkor a hiperbola egyenlete:

$$(x - 1)(y - 1) = 0,$$

azaz szintén egyenespárral van dolgunk, mely az $x = 1, y = 1$ egymásra merőleges egyenesekből áll.

Ha $m \neq 0$ és $m \neq 1$, akkor a hiperbola helyzete – és ennek megfelelőleg az y függvény változása – kétféle lehet, aszerint, amint

$$m^2 - m \gtrless 0.$$

I.

$$m^2 - m = m(m - 1) > 0, \quad \text{ha} \quad m < 0 \quad \text{vagy} \quad m > 1.$$

Ekkor a hiperbola az $x = m$ és $y = m$ egyenesekhez viszonyítva az $x < m$ és $y < m$, ill. az $x > m$ és $y > m$ relációk által meghatározott síkrészekben (első és harmadik negyedben) fekszik. Az y függvény változását a köv. táblázat mutatja:

x	$-\infty$	$\dots$	m	m	$\dots$	$+\infty$
y	m	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	m

Azaz: y folyton fogy; $x = m$ helyen szakadása van.

II. $m^2 - m = m(m - 1) < 0$, ha $0 < m < 1$. Ebben az esetben a hiperbola ágai az $x < m, y > m$, ill. $x > m, y < m$ relációk által meghatározott síkrészekben (második és negyedik síknegyedben) fekszenek. Az y függvény változását mutatja:

x	$-\infty$	$\dots$	m	m	$\dots$	$+\infty$
y	m	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	m

A függvény értéke folyton növekedik; az $x = m$ helyen szakadása van.

2⁰. Ha $m \neq 0$, akkor, mivel

$$x + y = 1 \quad \text{és} \quad xy = m^2,$$

x és y az

$$u^2 - u + m^2 = 0$$

egyenlet gyökei. Ezek valósak, ha $1 - 4m^2 \geq 0$, azaz $|m| \leq \frac{1}{2}$,

és

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4m^2}), \quad y = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1 - 4m^2}).$$

A gyökök szerkesztése: megszerkesztjük a félkört, melynek átmérője az egység. Az átmérővel párhuzamosan, az átmérőtől $|m|$ távolságban egyenest húzunk, amely a félkört metszi, ha $|m| < \frac{1}{2}$, érinti, ha $|m| = \frac{1}{2}$. A metszéspontnak az átmérőn való vetülete az átmérőt két részre osztja; ezek egyike x , a másika y .

Ha $|m| = \frac{1}{2}$, akkor $x = y = \frac{1}{2}$.

Mandl Béla (Zrínyi Miklós rg. VII. o. Bp. VIII.).

¹ Úgy foghatjuk fel a dolgot, mintha a koordináta-rendszer tengelyeit önmagukkal párhuzamosan eltoltuk volna.

Jegyzet. Mindazon hiperbolák, melyeket az 1) egyenlet a változó m paraméterrel meghatároz, kerestülmennek az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontokon. Az I. csoporthoz tartozó hiperboláknak azon ága, mely vagy az $x < m$, $y < m$, vagy az $x > m$, $y > m$ síkrészben fekszik, mind a két ponton megy keresztül A II. csoporthoz tartozó hiperboláknak egyik ága az $(1, 0)$, a másik ága a $(0, 1)$ ponton megy keresztül.

Ha 1)-ből

$$y = \frac{m(x-1)}{x-m}$$

akkor

$$y' = \frac{m(1-m)}{(x-m)^2}$$

y' előjele m megadott értékénél állandó előjelű, tehát a megoldásban jellemzett változást igazolja.

Végül megjegyezzük, hogy a feladat sajtóhibával látott napvilágot. Ezen körülmény a feladatot egyszerűbbé tette.