

A  $G_3$  és  $G_2$  görbék közös pontjait az

$$(1) \quad y = 2x^3 - 8x \dots$$

$$(2) \quad \text{és} \quad y = mx^2 - 8x \dots$$

egyenletekből álló rendszer gyökei határozzák meg.  $y$  kiküszöbölésével

$$(3) \quad 2x^3 - 8x = mx^2 - 8x \quad \text{ill.} \quad 2x^3 - mx^2 \equiv x^2(2x - m) = 0 \dots$$

Ezen egyenletnek  $x = 0$  kétszeres gyöke. Az  $(x = 0, y = 0)$  pont, azaz az origo a két görbének érintkezési pontja. Ezen kívül még

$$2x - m = 0, \quad \text{ill.} \quad x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{m^3}{4} - 4m$$

értékpár határoz meg egy közös pontot, t. i.  $A$ -t. Az  $OA \equiv e$  egyenes egyenlete

$$(4) \quad y = \frac{m^2 - 16}{2}x \dots$$

A  $G_3$  görbe zérus helyeit a  $2x^3 - 8x \equiv 2x(x^2 - 4) = 0$  egyenlet gyökei szolgáltatják; ezek  $x_1 = 0, x_2 = +2, x_3 = -2$ .

A zérus helyek koordinátái:  $(0, 0), (+2, 0), (-2, 0)$ .

A  $(+2, 0)$  pontból az  $e$ -re bocsátott merőleges egyenes egyenlete

$$(5) \quad y = \frac{2}{16 - m^2}(x - 2) \dots$$

A 4) és 5) egyenes metszéspontjának  $M_1$ -nek koordinátáit, mint  $m^2$  függvényeit kapjuk meg a 4) és 5) egyenletekből. Ha tehát e két egyenletből  $m^2$ -et kiküszöböljük,  $x$  és  $y$ , azaz az  $M_1$  koordinátái között kapunk egy egyenletet, azon görbéét, amelynek pontja  $M_1$ .

4)-ből

$$m^2 = \frac{2y + 16x}{x},$$

5)-ből

$$m^2 = \frac{16y - 2x + 4}{y}.$$

Eszerint

$$(6) \quad \frac{2y + 16x}{x} = \frac{16y - 2x + 4}{y} \dots$$

Rendezés után

$$(7) \quad x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad \text{ill.} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1 \dots$$

azon kör egyenlete, amelynek pontja  $M_1$ . Ezen kör középpontja az  $X$ -tengelyen van, keresztülmegy az origon, sugara 1.

Az  $M_2$  pontra nézve pedig

$$(8) \quad (x + 1)^2 + y^2 = 1 \dots$$

oly kör egyenlete, mely az előbbivel szimmetrikus az  $Y$ -tengelyre nézve.

Ha t. i. a  $(-2, 0)$  pontból  $e$ -re merőlegest bocsátunk, ennek egyenlete

$$y = \frac{2}{16 - m^2}(x - 2).$$

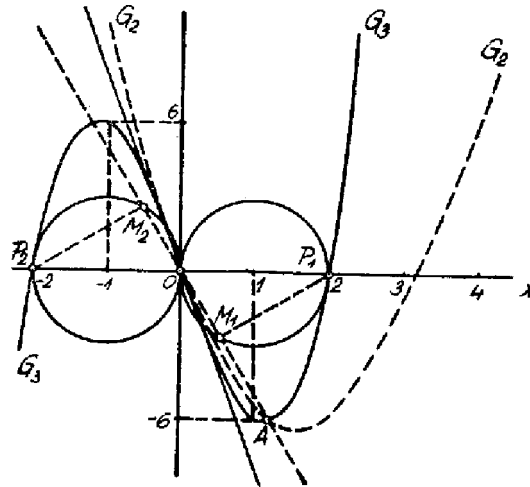
Ennek megfelelőleg 6) jobboldalán  $+4$  helyett  $-4$  és így  $x^2 + y^2 + 2x = 0$  keletkezik.

Kérdés már most: leírja-e  $M_1$  az egész körvonalat, amelynek egyenlete a 7), ill.  $M_2$  azon körvonalat, amelynek egyenlete 8)? Hogy ezen kérdésre felelhessünk, szükséges és elegendő, hogy a 4) alatti  $OA \equiv e$  egyenes helyzetét vizsgálhassuk, azaz ennek irányhatározója felvessz-e minden értéket  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig?

Az  $e$  egyenes irányhatározója:  $\frac{m^2 - 16}{2}$ . Ennek értéke, ha  $m$  változik  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig,  $+\infty$ -tól csökken  $-8$ -ig, azután növekszik  $-8$ -tól  $+\infty$ -ig; tehát nem veszi fel azon értékeket, melyek  $-8$  és  $-\infty$  között vannak. Ebből következik, hogy az  $e$  egyenes, mely  $O$  körül forog, nem vesz fel minden helyzetet. Az  $O$  ponthoz tartozó sugársor sugarai közül kimaradnak azok, melyeknek irányhatározói  $-8$  és  $-\infty$  között vannak. Ezen kimaradó egyeneseken fekvő  $M_1$ , ill.  $M_2$  pontok nem

tartoznak a mértani helyhez. Más szóval, az  $M_1$  mértani helye a 7) alatti kör egy része; a 7) alatti körből azon ívet kell elvonnunk, melyet az  $y = -8x$  egyenes vág le róla. Ezen íven fekvő pontokra nézve

$$0 < x < \frac{2}{65} \quad \text{és} \quad y < 0.^1$$



Hasonlóan az  $M_2$  pontok mértani helye a 8) kör egy része. Ezen körből azon ívet kell elvonnunk, melynek pontjaira nézve

$$-\frac{2}{65} < x < 0 \quad \text{és} \quad y > 0.$$

(A két körből kieső ívrész szimmetrikus helyzetű az  $O$  pontra nézve).

Vizsgáljuk már most közelebbről a geometriai viszonyokat. A  $G_3$  oly szilárd harmadrendű parabola, mely az  $X$ -tengelyt a  $-2, 0, +2$  helyeken metszi; a  $(0, 0)$  pont a görbe inflexiós pontja és itt az érintő irányhatározója  $-8$ . (Egyenlete  $y = -8x$ ). A görbének  $x = -2$  és  $x = 0$  között felső,  $x = 0$  és  $x = 2$  között alsó tetőpontja van: az előbbi koordinátái  $x_1^{\infty} = -1,15$ ,  $y_1^{\infty} = 6,1$ , az utóbbié  $x_2^{\infty} = +1,15$ ,  $y_2^{\infty} = -6,1$ .<sup>2</sup>

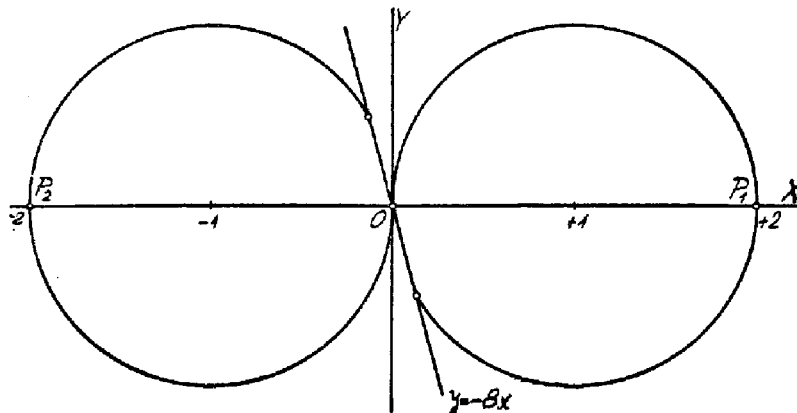
A  $G_2$  az  $m$  értéke szerint változó másodrendű parabola, de mindegyik keresztülmegy az origon és ezen pontban mindegyiknek érintője az  $y = -8x$  egyenes, azaz  $G_2$  és  $G_3$  a  $(0, 0)$  pontban érintkeznek.

Ha  $m = 0$ , akkor a  $G_2$  parabolából az  $y = -8x$  egyenes lesz.

Ha  $m > 0$ , akkor  $G_2$ -nek alsó tetőpontja van az  $x = \frac{4}{m}$  helyen.  $G_2$  a  $G_3$ -t az  $X$ -tengely pozitív oldalán metszi az  $A \left( \frac{m}{2}, \frac{m^3}{4} - 4m \right)$  pontban. Ezen metszéspont végig fut a  $G_3$ -nak azon részén, mely az  $X$ -tengely pozitív oldalán fekszik. Az  $OA$  egyenes határhelyzete azonban az  $y = -8x$  egyenes.<sup>3</sup>

Az  $y = ax$  egyenesek közül azoknak, amelyekre nézve  $a < -8$ , nincs a  $G_3$  görbével (az origon kívül) közös pontjuk.

Ha  $m < 0$ , akkor  $G_2$ -nek felső tetőpontja van az  $x = \frac{4}{m}$  helyen.  $G_2$  a  $G_3$ -t az  $X$ -tengely negatív oldalán metszi az  $A$  pontban. Ezen metszéspont végig fut a  $G_3$ -nak azon részén, mely az  $X$ -tengely negatív oldalán fekszik. Az  $OA$  egyenes határhelyzete ugyanaz, mint előbb.



<sup>1</sup> Az  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  és az  $y = -8x$  egyenes közös pontjai az  $x = 0$  és  $x = \frac{2}{65}$  abszcisszákhöz tartoznak.

<sup>2</sup>  $y = 2x^3 - 8x$  esetében  $y' = 6x^2 - 8 = 0$ , ha  $x^2 = \frac{4}{3}$ ,  $x^{\infty} = \pm 1,15$ .

<sup>3</sup> Ha  $m = 0$ , akkor az  $A$  pont  $O$ -ba esik. Ekkor  $OA$  a  $G_3$  inflexiós érintője lesz.

Ha az  $y = ax$  egyenesre<sup>4</sup> a  $P_1(2, 0)$  pontból merőlegest állítunk, akkor ennek talppontja  $M_1$ , Thales tétele szerint oly körön fekszik, melynek átmérője az  $OP_1$  távolság. Az  $M_1$  azonban nem írja le ezen kört egészen: kimaradnak azon pontjai, amelyek az  $y = ax$  sugársor azon egyenesein fekszenek, amelyekre nézve  $a < -8$ .

Ha pedig az  $y = ax$  egyenesre a  $P_2(-2, 0)$  pontból állítunk merőlegest, ennek  $M_2$  talppontja oly körön fekszik, amelynek átmérője  $OP_2$ . Az  $M_2$  azonban nem írja le egészen ezen kört: kimaradnak e kör azon pontjai, amelyek az  $y = ax$ ,  $a < -8$  egyeneseken fekszenek.

Forgassuk az  $O$  ponton átmenő egyenest az  $Y$ -tengelynek megfelelő kezdőhelyzetből a pozitív forgási irányban, míg az  $y = -8x$  egyenes helyzetébe jut; *ezen forgás közben leírt síkrészen fekvő pontjai a két körnek nem tartoznak az  $M$  pont mértani helyéhez.*

---

<sup>4</sup> Ahol  $a \geq -8$ .