

1⁰. Az $ABC \Delta$ három magasságvonala egy M ponton megy keresztül és ezért Ceva tételével:

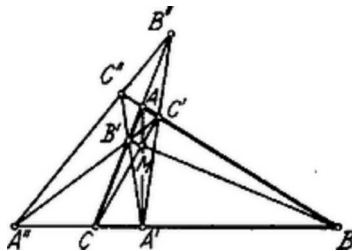
$$(1) \quad \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1 \dots$$

Az $ABC \Delta$ minden oldalát metszi az $A''B'C'$ egyenes és így Menealos tétele szerint

$$(2) \quad \frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = +1 \dots$$

(1)-ből és (2)-ből keletkezik

$$(3) \quad \frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{BA'}{CA'} = -1 \dots$$



Hasonlóan mutatható ki, hogy

$$(4) \quad \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{CB'}{AB'} = -1 \dots$$

$$(5) \quad \text{és} \quad \frac{AC''}{BC''} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1 \dots$$

A (3), (4), (5) megfelelő tagjainak szorzásával

$$\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1$$

és végül tekintettel (1)-re

$$\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$$

azaz az A'' , B'' , C'' pontok egy egyenesen fekszenek.

2⁰. Minthogy a $BC'B'C$ idom húrnégyszög, azért

$$\overline{A''B'} \cdot \overline{A''C'} = \overline{A''C} \cdot \overline{A''B}.$$

A baloldalon álló szorzat jelenti az A'' pontnak az $A'B'C' \Delta$ köré írt, a jobboldali szorzat pedig az $ABC \Delta$ köré írt körre vonatkozó hatványát, tehát az A'' pont hatványa a szóban forgó két körre nézve egyenlő. Ugyanez áll a B'' és C'' pontokra is. Eszerint az A'' , B'' , C'' pontok a két kör hatványvonalán fekszenek, azaz az $A''B''C''$ egyenes a két kör hatványvonala.

Nagy Elemér (Ciszterci Szent Imre g. VII. o. Bp. XI.)

Jegyzet. 1⁰. Az $ABC \Delta$ és $A'B'C' \Delta$ megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egy M ponton mennek keresztül; ebből következik, Desargues tétele szerint, hogy a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesen fekszenek.

2⁰. Ha a tétel 2⁰. részét mutatnánk ki előbb, akkor ezzel a tétel első része igazolva van.

Feladatunknak azonban az volt a célja, hogy az 1⁰. részt a 2⁰.-tól függetlenül oldjuk meg.