

Az $y = ax^2 + bx + c$ görbe (x_1, y_1) pontjában húzott érintő irányhatározója

$$(1) \quad m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1} = (3ax^2 + b)_{x=x_1} = 3ax_1^2 + b \dots$$

és az érintő egyenlete

$$(2) \quad y - y_1 = m(x - x_1) \dots$$

Az érintőnek és a görbének közös pontjait az

$$y = ax^3 + bx + c \quad \text{és} \quad y = m(x - x_1) + y_1$$

egyenletekből álló rendszer megoldásai adják meg. y kiküszöbölésével a közös pontok abcisszái az

$$(3) \quad ax^3 + bx + c = m(x - x_1) + y_1 \quad \text{ill} \quad ax^3(b - m)x + c + mx_1 - y_1 = 0 \dots$$

egyenlet gyökei. Minthogy (1)-ből $b - m = -3ax_1^2$

és

$$c + mx_1 - y_1 = c - (3ax_1^2 + bx_1 - ax_1^3 - b)x_1 - c = 2ax_1^3,$$

a (3) egyenlet a következő alakban írható:

$$(3a) \quad ax^3 - 3ax_1^2x + 2ax_1^3 = 0, \quad \text{ill.} \quad x^3 - 3x_1^2x + 2x_1^3 = 0 \dots$$

Ezen egyenletnek az érintkezés miatt x_1 a kétszeres gyöke; ha a harmadik gyök α , akkor a három gyök összege, mivel x^2 együtthatója eltűnt,

$$2x_1 + \alpha = 0$$

és így

$$\alpha = -2x_1, \quad \beta = -8ax_1^3 - 2bx_1 + c$$

a görbének és az (x_1, y_1) pontjában húzott érintőnek M metszéspontját határozzák meg.

Az MT távolság felezőpontjának koordinátái

$$\xi = \frac{x_1 + \alpha}{2} = \frac{x_1 - 2x_1}{2} = -\frac{x_1}{2}, \quad \eta = \frac{y_1 + \beta}{2} = \frac{-7ax_1^3 - bx_1 + 2c}{2}.$$

$x_1 = -2\xi$ helyettesítésével

$$\eta = 28\alpha\xi^3 + b\xi + c \quad \text{vagy} \quad y = 28ax^3 + bx + c$$

lesz az MT távolság felezőpontjának mértani helye.

Pálos Peregrin (Bencés rg. VIII. o. Pápa.)

Jegyzet. A 3a) egyenletben a gyökök szorzata

$$-2x_1^3 = x_1^2\alpha, \quad \text{azaz} \quad \alpha = -2x_1.$$

A 3a) egyenletet $x = x_1$ kielégíti. De $x = x_1$, kielégíti a

$$3x^2 - 3x_1^2 = 0$$

egyenletet is; ezen egyenlet baloldala a 3a) baloldalának differenciálhányadosa. Ugyanis az $f(x) = 0$ egyenlet kétszeres gyöke az $f'(x) = 0$ egyenletnek is gyöke.

Az $(x = 0, y = c)$ pont úgy az adott görbének, mint az M pont mértani helyének közös pontja, még pedig inflexiós pontjuk. Az inflexiós pontban összeesik a T és az M , és így az MT felezőpontja is ide esik.