

I. Megoldás. Jelölje t a háromszög területét és tekintsük az

$$y = t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Adataink szerint $b = kc$ és

$$2s = a + kc + c = a + (k+1)c; \quad 2(s-a) = (k+1)c - a;$$

$$2(s-b) = a - (k-1)c; \quad 2(s-c) = a + (k-1)c.$$

Így

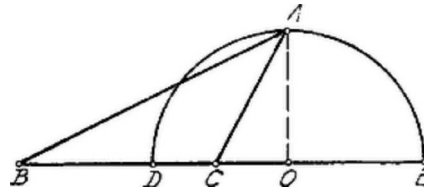
$$8y = [(k+1)^2 c^2 - a^2][a^2 - (k-1)^2 c^2]$$

$$8y = -(k^2 - 1)^2 c^4 + 2(k^2 + 1)a^2 c^2 - a^4.$$

Eszerint y oly másodfokú függvénye c^2 -nek, amelynek maximuma van, ha

$$c^2 = \frac{(k^2 + 1)a^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Lóránd Endre (Kemény Zsigmond rg. VIII. o. Bp. VI.).



II. Megoldás. Minthogy az $ABC\Delta$ $BC = a$ oldala adott, az A csúcsra nézve pedig

$$AC : AB = k : 1,$$

az A pont mértani helye egy Apollónius-féle kör. Ezen kör O középpontja a BC egyenesen fekszik és ezt a D és E pontokban metszi úgy, hogy¹

$$BD : DC = 1 : k \quad \text{és} \quad BE : CE = 1 : k.$$

Minthogy²

$$BD + DC = a, \quad \text{azért} \quad BD = \frac{a}{1+k}, \quad DC = \frac{ak}{1+k},$$

$$BE - CE = a, \quad \text{ezért} \quad BE = \frac{a}{1-k}, \quad CE = \frac{ak}{1-k}.$$

A szóbanforgó kör átmérője $DE = \frac{2ak}{1-k^2}$.

Az $ABC\Delta$ területe akkor legnagyobb, ha a BC oldalhoz tartozó magassága a legnagyobb, tehát akkor, amidőn az A vetülete a BC -n 0. A háromszög magassága ekkor

$$AO = \frac{1}{2}DE = \frac{ak}{1-k}, \quad \text{és} \quad c^2 = \overline{AB^2} - \overline{AO^2} + \overline{BO^2}.$$

Azonban $BO = BD + DO = \frac{a}{1+k} + \frac{ak}{1-k^2} = \frac{a}{1-k^2}$.

így $c^2 = \left(\frac{a}{1-k^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{1-k^2}\right)^2 = \frac{a^2(1+k^2)}{(1-k^2)^2}$.

c^2 ezen értéke mellett legnagyobb az adott feltételeknek megfelelő háromszög területe.

Holzer Pál (Faludi Ferenc rg. VI. o. Szombathely).

¹ (B, C) és (D, E) harmonikus pontpárok. Ha valamely, a feltételnek megfelelő A pontot kijelöltünk, akkor a $BAC\angle$ -et és a mellékszögét felező egyenesek meghatározzák a BC egyenesen a D és E pontokat.

² Ábránk szerint $k < 1$. Az eredmény ugyanaz, ha $k > 1$.