

I. Megoldás. Ismeretes összefüggés: $k_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Tegyük fel, hogy $k_c > c$, akkor

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} > c^2 \quad \text{vagyis} \quad \frac{a^2 + b^2}{2} > \frac{5c^2}{4}.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ha} & k_a > a, & \text{akkor} & \text{hasonlóan} & \frac{b^2 + c^2}{2} > \frac{5a^2}{4}, \\ & k_b > b, & „ & „ & \frac{c^2 + a^2}{2} > \frac{5b^2}{4}. \end{array}$$

Eszerint, ha mindegyik súlyvonal nagyobb lenne a hozzátartozó oldalnál, akkor – a három egyenlőtlenség megfelelő tagjainak összeadásával

$$a^2 + b^2 + c^2 > \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

lenne, azaz ellenmondásra jutunk. Kell tehát, hogy legalább egy súlyvonal kisebb legyen a hozzátartozó oldalnál.

NB. Hogy mindig van oly középvonal mely nagyobb a hozzátartozó oldalnál, nem áll meg, mert pl. az egyenlőoldalú háromszögben mindegyik kisebb az oldalnál.

Oroszhegyi Szabó Lajos (Kegyesrendi g. VIII. o. Bp.).

II. Megoldás. A 702. gyakorlatban (VIII. évf. 216. o.) kimutattuk, hogy

$$k_a + k_b + k_c < a + b + c.$$

Ha

$$k_a \geq a, \quad k_b \geq b, \quad k_c \geq c,$$

akkor

$$k_a + k_b + k_c \geq a + b + c,$$

tehát idézett tételünkkel ellenmondásba jutnánk.

Kell tehát, hogy a három súlyvonal valamelyike kisebb legyen a hozzátartozó oldalnál.

Donáth Géza (Szent László rg. VII. o. Bp. X.)

Jegyzet. Mindkét megoldás számos változatban szerepel. Jelentékeny részük kimutatja, hogy a legnagyobb oldal mindig nagyobb, mint a hozzátartozó súlyvonal.