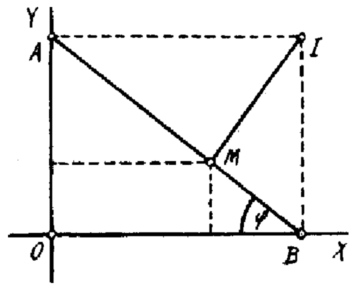
I. Megoldás. Jelentse A a vonaldarabnak az Y tengelyen, B az X-tengelyen mozgó végpontját. Az A ill. B pont által leírt ellipszis egy vonaldarabbá zsugorodik össze, az előbbi az Y-, utóbbi az X-tengelyen fekszik. Az A ponthoz tartozó normális merőleges az Y-, a B ponthoz tartozó merőleges az X tengelyre; ezen két merőleges metszőpontja legyen I. Ki fogjuk mutatni, hogy az AB tetszőleges M pontjához tartozó normális az I ponton megy keresztül.



Legyen $AM=a$, $MB=b$, $AB=a+b$. A vonaldarab helyzetét az $OBA\sphericalangle=\varphi$ határozza meg. Ezen helyzetben az M pont koordinátái (x,y), az I ponté (x_1,y_1), úgy hogy

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi;\text{[1]}$$
$$x_1=OB=(a+b)\cos\varphi,\quad y_1=OA=(a+b)\sin\varphi.$$

Az MI egyenes irányhatározója:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{(a+b)\sin\varphi-b\sin\varphi}{(a+b)\cos\varphi-a\cos\varphi}=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}.$$

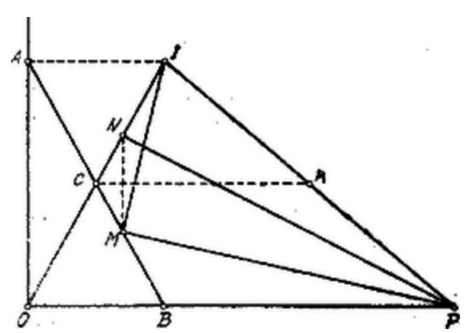
Az M pont által leírt ellipszis M pontjához tartozó normális irányhatározója $-\frac{x'}{y'}$,[2] ahol y' és x' jelentik y-nak és x-nek φ szerint képezett differenciálhányadosait és így

$$-\frac{x'}{y'}=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}=\frac{y_1-y}{x_1-x}.$$

Tehát az M ponthoz tartozó normális iránya összeesik MI irányával, a szóbanforgó normális az I ponton megy keresztül.

Frankl Ottó (izr. rg. VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. Az előbbi megoldás bevezetésében jellemeztük az AB vonaldarab és az M pont helyzetét. Feltehetjük, hogy $AM>MB$. Legyen C az AB felezőpontja. Az M pontból OA-val párhuzamosan vont egyenes OC-t az N pontban metszi; ekkor $CM=CN$ és így $ON=AM$, az ellipszis félnagytengelye ill. a főkör sugara. Eszerint az N pont a főkör azon pontja, melynek affin pontja az ellipszisen az M. A főkörnek N pontjában húzott érintője OB-t a P pontban metszi; ezért az ellipszisnek M pontjához tartozó érintője MP. Az ellipszisnek M pontjához tartozó normálisa MP-re merőleges és OC-t az I pontban metszi.



Az IMP és INP derékszögű háromszögek IP átfogójának K felezőpontja az I, N, M, P pontokon átmenő kör középpontja. Ezért az MN távolságot merőlegesen felező egyenes – az OB-vel párhuzamos – keresztülmegy a K ponton, továbbá – mivel $CM=CN$ – a C ponton is. Minthogy K felezi IP-t és $CK\parallel OB$, következik: $OI=2OC$, azaz az M ponthoz tartozó normális OC-t mindig azon szilárd I pontban metszi, amelyre nézve $OI=2OC$. ($OAIB$ téglalap csúcsa I.)

Komlós János (Gr. Széchenyi István gyakorló r. VII. o. Pécs).

---

[1] Az ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

[2] Az érintő irányhatározója: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{y'}{x'}$; a normálisé $-1:\frac{y'}{x'}=-\frac{x'}{y'}$.