

I. Megoldás.

$$\text{Ha } n = 1, \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$n = 2 \text{ mellett } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} n = 3 \text{ esetben } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a tétel igaz n -re, azaz

$$S_n \equiv \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Kimutatjuk, hogy a tétel igaz $n+1$ -re is. Ugyanis

$$\begin{aligned} S_{n+1} &\equiv S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Azonban } \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Ennek tekintetbe vételével, az egyenlet jobboldalán elmarad $\frac{1}{n+1}$

$$\text{sgy } S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2},$$

azaz S_{n+1} képezésének törvénye megegyezik S_n törvényével.

Míthogy a tétel igaz, ha $n = 1, 2, 3$, igaz az n bármely értéke mellett.

Almássy György (Kegyesrendi g. VIII. o. Veszprém).

II. Megoldás. Míthogy (az előbbiek szerint)

$$\frac{1}{(2x-1)2x} = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x},$$

a bebizonyítandó egyenlőség baloldala

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x} \right) - \sum_1^n \frac{1}{x}$$

alakban írható. Azonban

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x} \right) = \sum_1^{2n} \frac{1}{x},$$

mert $\sum_1^n \frac{1}{2x-1}$ a $2n$ -nél kisebb páratlan számok reciprok értékeinek és

$\sum_1^n \frac{1}{2x}$ $2n$ -nél nem nagyobb páros számok reciprok értékeinek összege és így a két összeg együttesen az 1-től $2n$ -ig haladó összes egész számok reciprok értékeinek összege. Eszerint a szóbanforgó összeg valóban

$$\sum_1^{2n} \frac{1}{x} - \sum_1^n \frac{1}{x} = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{x} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Harsányi János (Ág. ev. g. VIII. o. Bp).