I. Megoldás. Tegyük fel, hogy ponthalmaz centruma O; minthogy a halmaz véges, van – legalább – egy pont, A, mely O-tól legmesszebb van. Az $OA = r$ sugárral kört rajzolva, a halmaz pontjai nem eshetnek e körön kívül. Ezen körön fekszik A-nak, az O-ra vonatkoztatott szimmetrikus pontja A_1 is, mint az A pontból húzott átmérő másik végpontja.

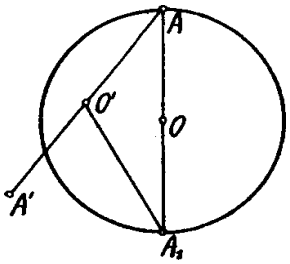
Ha a halmaznak még egy, O-tól különböző centruma volna, O', akkor ennek is az előbbi körön belül kell feküdnie, tehát

$$OA' + O'A_1 \geq AA_1 = 2r \tag{1}$$

lenne. (Az egyenlőségi jel akkor érvényes, ha O' az AA_1 átmérőn feküdnék.) Az (1) relációból következik, hogy – mivel $O' \not\equiv O$ –az $O'A$ és $O'A_1$ távolságok egyike nagyobb r-nél. Legyen pl. $O'A > r$. Ekkor A-nak O'-re vonatkozó szimmetrikus pontja A' is a halmazhoz tartozik, úgyhogy

$$AA' > 2r$$

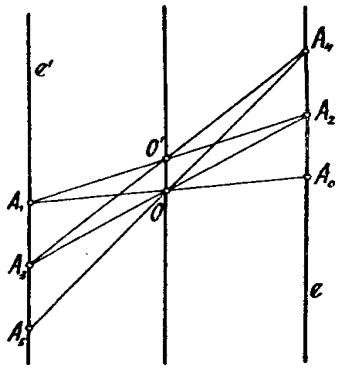
lenne, azaz A' a halmaz oly pontja lenne, mely a körön kívül feküdnék.



Ez azonban ellenkezik azon követelménnyel, amely szerint a halmaz egy pontja sem feküdhetik az O középpontú és OA sugarú körön kívül.

Oroszhegyi Szabó Lajos (Kegyesrendi g. VII. o. Bp. IV.)

II. Megoldás. Legyen a halmaz egy pontja A_0 és tegyük fel, hogy a halmaznak két centruma volna, O és O'. Ekkor a halmazhoz kell tartozniok az A_0-nak O-ra vonatkoztatott tükörképének A_1-nek, az A_1-nek az O'-re vonatkoztatott tükörképének A_2-nek, az A_2-nek O-ra vonatkoztatott tükörképének A_3-nak, ennek az O'-re vonatkoztatott tükörképének A_4-nek is s. í. t. Ilyen módon a halmaznak végtelen sok pontja lenne.



Ugyanis, mivel

$$OA_0 = OA_1 \quad \text{és} \quad O'A_1 = O'A_2$$

következik:

$$A_0A_2 \parallel OO' \quad \text{és} \quad A_0A_2 = 2OO'.$$

Továbbá:

$$O'A_1 = O'A_2 \quad \text{és} \quad OA_2 = OA_3,$$

tehát

$$A_1A_3 \parallel OO' \quad \text{és} \quad A_1A_3 = 2OO'.$$

Ugyanígy $A_2A_4 \parallel OO'$ és $A_2A_4 = 2OO'$, $A_3A_5 \parallel OO'$ és $A_3A_5 = 2OO'$ s. í. t. Eszerint az A_0, A_2, A_4, A_6 ... pontok, továbbá az A_1, A_3, A_5, A_7 ... pontok két, az OO'-vel párhuzamos e ill. e' egyenesen feküdnének, [1] egymástól különböző pontjai lennének a halmaznak. Számuk bármely nagy számnál nagyobb: ezen körülmény azonban ellenkezik azon feltevéssel, hogy a ponthalmaz véges.

[1] Az e egyenesen A_0-ból kiindulva OO' irányban, az e' egyenesen A_1-ből kiindulva $O'O$ irányban kell egymásután $2OO'$ távolságot akárhányszor felrakni!

Szele Tibor (ref. g. VIII. o. Debrecen)

III. Megoldás. A ponthalmazt térbeli elosztásúnak gondoljuk. Ha az O centrumba háromtengelyű derékszögű koordinátarendszer kezdőpontját helyezzük és a pontok koordinátáit x_i, y_i, z_i-vel jelöljük, akkor a centrum definíciója alapján

$$\Sigma x_i = 0, \qquad \Sigma y_i = 0, \qquad \Sigma z_i = 0,$$

mert valamely pont és O-ra nézve szimmetrikus pontjának koordinátái abszolút értékre egyenlők, de ellenkező előjelűek.

Legyenek a második, O' centrum koordinátái a, b, c. A második centrumba az első rendszer tengelyeivel párhuzamos tengelyű koordinátarendszer kezdő pontját helyezzük. A pontok koordinátái ezen új rendszerben

$$\xi_i = x_i - a, \quad \eta_i = y_i - b, \quad \xi_i = z_i - c.$$

Hogy O' is centrum legyen, annak szükséges feltétele:

$$\Sigma\xi_i = \Sigma x_i - \Sigma a = 0 - na = 0, \quad \Sigma\eta_i = -nb = 0 \quad \text{és} \quad \Sigma\xi_i = -nc = 0,$$

ahol n a pontok száma és ez véges. Ebből következik nyilván

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

azaz O' az O-ba esik.

Végtelen ponthalmaz esetén ezen okoskodás nem tartható fenn, mert ott $\Sigma\xi_i$ végtelen sor összegét jelenti, melynek értéke általában a tagok sorrendjétől függ.

Schön Ferenc (Kölcsey rg. VII. o. Bp.)