I. Megoldás. E tételt teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani.

Ha $n = 1$, akkor

$$b_1 = a_1 \quad \text{és} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{a_1} = 1. \tag{2}$$

Ha $n = 2$, akkor két eset lehetséges:

1) $b_1 = a_1$ és $b_2 = a_2$, amidőn $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} = 2$,

2) $b_1 = a_2$ és $b_2 = a_1$, amidőn $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2$,

mert $\qquad a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2, \quad$ és $\quad (a_1 - a_2)^2 > 0.$

Eszerint valóban áll:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \geq 2. \tag{3}$$

Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n = k - 1$ esetében, azaz

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_j}{b_j} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} \geq k - 1. \tag{4}$$

Mindenesetre kiindulhatunk abból, hogy jelzéseink megfelelő választásával

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 < \ldots \leq a_j \ldots < a_k < \ldots \leq a_n.$$

Továbbá: k elemnek valamely permutációját úgy kapjuk meg, hogy képezzük $k - 1$ elem megfelelő permutációját és ekkor hozzácsatoljuk a k-dik elemet, ezt az 1., 2., ... k-dik helyre téve.

Adjunk tehát a (4) alatti, helyesnek talált összefüggés mindkét oldalához $\frac{a_k}{a_k}$-t, azaz 1-t. Keletkezik

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_j}{b_j} + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{a_k}{a_k} \geq k. \tag{5}$$

Ha $b_k = a_k$, tételünk máris igaz. Azonban, ha $b_k \neq a_k$, akkor a b_k-t valamely b-vel, pl. b_j-vel fel kell cserélni.

Az (5) baloldalán tehát minden ugyanaz marad, csak

$$\frac{a_j}{b_j} + \frac{a_k}{a_k} \quad \text{helyébe} \quad \frac{a_j}{a - k} + \frac{a_k}{b_j} \quad \text{kerül.}$$

Ezáltal azonban (5) baloldalát csak növelhetjük. Ugyanis

$$\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{b_j} \geq \frac{a_j}{b_j} + \frac{a_k}{a_k},$$

mert

$$\frac{a_j - a_k}{a_k} + \frac{a_k - a_j}{b_j} = \frac{(a_j - a_k) + (a_k - a_j)a_k}{b_j a_k} = \frac{(a_k - a_j)(a_k - b_j)}{b_j a_k} \geq 0$$

tekintettel arra, hogy $a_k \geq a_j$ és $a_k \geq b_j$, hiszen b_j, az $a_1 \ \ldots \ a_{k-1}$ számok valamelyike.

Minthogy a tétel igaz, ha $n = 1$, $n = 2$, tehát igaz bármely n-re. Az egyenlőségi jel akkor érvényes, ha $a_i = b_i$, $(i = 1, \ 2 \ \ldots \ n)$.

Harsányi János (ág. ev. g. VII. o. Bp.)

II. Megoldás. Előbbi megoldásunkban már láttuk, hogy a tétel igaz, ha $n = 1$, ha $n = 2$.

Az adott összeg jele legyen S. A tétel helyességét elfogadjuk minden S alakú összegre, ha tagjainak száma kisebb, mint n.

Az összeadandók sorrendjének kellő megválasztásával sikerül a kérdéses összeget esetleg két vagy több zárt ciklusban előállítani ilyképpen:

$$S = \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_k}{a_1}\right) + \left(\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} + \frac{a - k + 2}{a_{k+3}} + \ldots + \frac{a - k + 2}{a - k + 1}\right) + \ldots = C_1 + C_2 + \ldots$$

A C_1, C_3, ... ciklusok ugyanolyan természetűek, mint az eredeti S összeg, t. i. a nevezők a számlálók egy (ciklikus) permutációját képezik. Azonban a ciklusok tagszáma kisebb, mint n és így

$$C_1 \geq k, \quad C_2 \geq l, \ldots$$

tehát

$$S = C_1 + C_2 + \ldots \geq k + l + \ldots \qquad \text{azaz} \qquad S \geq n.$$

Külön bizonyításra szorul a tétel most már, ha az S összeg magában egy felbonthatatlan ciklust alkot. Feltehetjük, hogy az a_n számnál kisebb nincs és az összeg tagjait úgy rendezzük, hogy azok a következő ciklust adják:

$$S = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_1}\right) + \\ + \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_1}.$$

A zárójeles rész $n-1$ tagból álló ciklus; érvényes tehát: $C \geq n-1$.
Az utolsó három tag

$$R = \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_{n-1}(a_1 - a_n) + a_n^2}{a_1 a - n} = \\ = \frac{(a_{n-1} - a_n)(a_1 - a_n) + a_1 a_n}{a_1 a_n}$$

Eszerint

$$R = \frac{(a_{n-1} - a_n)(a_1 - a_n) + a_1 a_n}{a_1 a_n} a_1 a_n + 1 \geq 1,$$

mert feltevésünk szerint $\quad a_{n_1} - a_n \geq 0 \quad$ és $\quad a_n \geq 0.$

Eszerint

$$S = C + R > n - 1 + 1 \quad \text{azaz} \quad S \geq n.$$

Schön Ferenc (Kölcsey rg. VII. o. Bp. VI.)
Szél György (Kölcsey rg. VII. o. Bp. VI.)

III. Megoldás. Legyen $x = i = \dfrac{a_i}{b_i}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$. Minthogy az a_i számok szorzata egyenlő a b_i számok szorzatával, az x_i számok szorzata

$$x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n = 1.$$

Ismeretes, hogy n poz. szám számtani középarányosa nem lehet kisebb a mértani középarányosuknál, [1] azaz

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

A mi esetünkben

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq 1,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Ilkovits Iván (Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp. VI.)

IV. Megoldás. Az a_1, a_2, a_n pozitív számokra nézve legyen

(1) $$a_1 \geq a_2 \geq a_3 > \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n.$$

A pozitív számok egy másik csoportja legyen

(2) $$x_1 \geq x_2 \geq x_3 > \ldots \geq x_{n-1} \geq x_n.$$

Az (1) szorzat valamely tagját szorozzuk meg a (2) szorzat valamely tagjával és az így nyert szorzatokat adjuk össze. Ilyen módon különböző értékű összegeket kapunk, melyek között van egy legkisebb és egy legnagyobb.

Ha az (1) sorozat tagjait a (2) sorozat megfelelő tagjaival szorozzuk össze, akkor ezen szorzatok összege lesz a legkisebb értékű. Ha az (1) sorozat tagjait a (2) sorozat fordított sorrendben vett tagjaival szorozzuk össze, akkor kapjuk a legnagyobb értékű összeget.

Jelentse most már x_{i_1}, x_{i_2} $\ldots$ x_{i_n} az x_i számok valamely permutációját, akkor nyilván

(3) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq a_1 x_{i_1} + a_2 x_{i_2} + \ldots + a_n x_{i_n}.$$

Legyen most már $x_i = \dfrac{1}{a_i}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$, tehát $a_i x_i = 1$. Ha az a_i számok csökkenő, akkor reciprok értékeik növekedő sorozatot alkotnak. Eszerint alkalmazhatjuk a (3) alatti relációt és így:

$$n \leq \frac{a_1}{a_{i_1}} + \frac{a_2}{a_{i_2}} + \ldots + \frac{a_n}{a_{i_n}}.$$

[1] L. K. M. és F. L. II. évf. 37. oldalon.

Minthogy b_1, b_2 ... b_n az a_i számok valamely permutációja, az a_{i_1}, a_{i_2} ... a_{i_n} számok helyébe b_1, b_2 ... b_n írható, tehát

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} > n.$$

Ezen bizonyítást Szűcs Adolf műegyetemi tanár mutatta be az Eötvös Loránd Társulat 1935. nov. 14-iki előadó ülésén. Megjelent a Társulat folyóiratában. (1935. július–decemberi füzetben 127. o.)