I. Megoldás. Az $y=ax+b$ egyenes érinti az $x^2+y^2=16$ kört, ha az

$$(1)\qquad x^2+(ax+b)^2=16, \quad \text{ill.} \quad \left(a^2+1\right)x^2+2abx+b^2-16=0$$

egyenletnek két egyenlő gyöke van. Ez bekövetkezik akkor, ha az (1) egyenlet discriminánsa eltűnik, tehát

$$(2)\qquad 4a^2b^2-4\left(a^2+1\right)\left(b^2-16\right)=0, \quad \text{azaz} \quad 16a^2-b^2+16=0.$$

Az $y=ax+b$ egyenes érinti az $y^2=6x$ parabolát, ha az

$$(3)\qquad (ax+b)^2=6x, \quad \text{ill.} \quad a^2x^2+(2ab-6)x+b^2=0$$

egyenlet discriminánsa eltűnik, tehát

$$(4)\qquad (2ab-6)^2-4a^2b^2=0, \quad \text{azaz} \quad 2ab=3.$$

Eszerint az $y=ax+b$ egyenes úgy a kört, mint a parabolát érinti, ha a és b kielégítik a (2) és (4) egyenletből álló egyenletrendszert.

(4)-ből $b=\dfrac{3}{2a}$. Helyettesítsük ezt (2)-be:

$$(5)\qquad 16a^2-\frac{a}{4a^2}+16=0 \quad \text{vagyis} \quad 64a^4+64a^2-9=0.$$

Az (5) egyenlet a^2-re nézve másodfokú; a^2-re az (5)-ből két valós, ellenkező előjelű értéket kapunk. Közülük csak a pozitív jöhet tekintetbe, tehát

$$a^2=\frac{-64+\sqrt{64^2+4\cdot 9\cdot 64}}{2\cdot 64}=\frac{-64+\sqrt{64(64+36)}}{2\cdot 64}=\frac{64+80}{2\cdot 64}=\frac{1}{8}$$

$$a=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}. \quad \text{(4) alapján} \quad b=\pm 3\sqrt{2}.$$

A közös érintők egyenlete:

$$y=\left(\frac{x}{4}+3\right)\sqrt{2} \quad \text{és} \quad y=-\left(\frac{x}{4}+3\right)\sqrt{2}.$$

E két érintő nyilván szimmetrikus helyzetű az X-tengelyre nézve, ami egyébként a kör és parabola helyzetéből előre is megállapítható.

Ha $y=\pm\left(\dfrac{x}{4}+3\right)\sqrt{2}$ helyettesítést a kör egyenletében elvégezzük, rendezés után $(3x+4)^2=0$ egyenletet nyerjük; az érintők a kört az $x=-\dfrac{4}{3}$ abscissához tartozó – az X-tengelyre nézve – szimmetrikus helyzetű pontokban érintik.

Ha $y=\pm\left(\dfrac{x}{4}+3\right)\sqrt{2}$ helyettesítést a parabola egyenletében elvégezzük, rendezés után $(x-12)^2=0$ egyenlethez jutunk; az érintők a parabolát az $x=12$ abscissához tartozó – az X-tengelyre nézve szimmetrikus helyzetű pontokban érintik.

Mandl Béla (Zrínyi Miklós rg. V. o. Bp. VIII.)

II. Megoldás. A kör valamely P pontjának koordinátái legyenek $(x,\,y)$, a parabola valamely Q pontjáé $(v,\,u)$, azaz

$$(1)\qquad x^2+y^2=16,$$

$$(2)\qquad u^2=6v.$$

A PQ egyenes irányhatározója

$$\frac{y-u}{x-v}.$$

Ha PQ a kört az $(x,\,y)$ pontban érinti; akkor

$$(3)\qquad \frac{y-u}{x-v}=-\frac{x}{y}.$$

Ha PQ a parabolát az $(u,\,v)$ pontban érinti, akkor

$$(4)\qquad \frac{y-u}{x-v}=-\frac{3}{u}.$$

Így az x, y, u, v meghatározására négy egyenletünk van. (3)-ból:

$$(3a)\qquad uy+vx=x^2+y^2=16.$$

(4)-ből:

$$\text{(4a)} \qquad uy - u^2 = 3x - 3v \;\text{ ill. }\; uy - 3x = u^2 - 3v = 3v.$$

$(3a)$- és (4)-ből a megfelelő tagok kivonásával:

$$\text{(5)} \qquad (v+3)x = 16 - 3v, \quad x = \frac{16-3v}{v+3}.$$

(3)-ból és $(4a)$-ból

$$\text{(6)} \qquad -\frac{x}{y} = \frac{3}{u} \;\text{ ill. }\; 3y + ux = 0.$$

(6)-ból és $(4a)$-ból:

$$\text{(7)} \qquad x = \frac{9v}{u^2+9} = -\frac{9v}{6v+9} = -\frac{3v}{2v+3}.$$

(5) és (7) egybekapcsolásával

$$\frac{16-3v}{v+3} = -\frac{3v}{2v+3}.$$

Rendezve:

$$\text{(8)} \qquad 3v^2 - 32v - 48 = 0.$$

A (8) gyökei $v_1 = 12$, $v_2 = -\frac{4}{3}$. Minthogy v a parabola pontjának abscissája csak pozitív lehet, tehát $v = 12$.

Ennek megfelel (5) vagy (7) szerint $x = -\frac{4}{3}$.

Tehát a közös érintők a kört az $x = -\frac{4}{3}$, a parabolát a $v = 12$ abscissához tartozó pontokban érintik. (L. I. megoldásban).

Szak Ányos (Bencés rg. VII. o. Pápa)

Jegyzet. $(3a)$ szerint

$$vx = 16 - uy$$

$(4a)$ szerint

$$3(v+x) = uy$$

(6)-ból és $(4a)$-ból

$$2vx = -3(x+v).$$

Ezen egyenletekből: $uy = 32$, tehát

$$v + x = \frac{32}{3}, \quad vx = -16.$$

v és x eszerint a $3z^2 - 32z - 48 = 0$ egyenlet gyökei. Ez nem más, mint a (8) egyenlet.