x hatványai szerint rendezve:

$$A(x+\alpha)^3 + B(x+\beta)^3 = (A+B)x^3 + 3(A\alpha + B\beta)x^2 + 3(A\alpha^2 + B\beta^2)x + A\alpha^3 + B\beta^3.$$

Ezen kifejezés azonos lesz az $x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ többtagúval, ha

(1) $$A + B = 1;$$

(2) $$A\alpha + B\beta = 2;$$

(3) $$A\alpha^2 + B\beta^2 = 5;$$

(4) $$A\alpha^3 + B\beta^3 = 14.$$

(1)-bő1 és (2)-ből:

$$A = 2\frac{2-\beta}{\alpha-\beta}, \qquad B = \frac{\alpha-2}{\alpha-\beta}.$$

Helyettesítsük ezeket (3)-ba és 4)-be:

(3a) $$(2-\beta)\alpha^2 + (\alpha-2)\beta^2 = 5(\alpha-\beta),$$

(4a) $$(2-\beta)\alpha^3 + (\alpha-2)\beta^3 = 14(\alpha-\beta).$$

Mindkét egyenletben a baloldal is osztható $(\alpha-\beta)$-val; ezen tényezővel egyszerűsítve:

(5) $$2(\alpha+\beta) - \alpha\beta = 5,$$

(6) $$2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha+\beta) = 14.$$

Ezen egyenletrendszer α és β-ra nézve szimmetrikus; a (6)-ot átalakítjuk még azáltal, hogy

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

helyettesítéssel élünk és így

(7) $$2(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(\alpha+\beta+2) = 14.$$

(5)-ből $\alpha\beta = 2(\alpha+\beta) - 5$; ezt (7)-be helyezve:

$$2(\alpha+\beta)^2 - \left[2(\alpha+\beta) - 5\right](\alpha+\beta+2) = 14 \quad \text{és innen: } \alpha+\beta = 4; \quad \alpha\beta = 3.$$

Eszerint α és β gyökei a

(8) $$z^2 - 4z + 3 = 0$$

egyenletnek; ebből $\alpha = 3$, $\beta = 1$ (vagy megfordítva).

Most már

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Ezért:

$$x^3 + 6x^2 + 15x + 14 \equiv \frac{1}{2}\left[(x+3)^3 + (x+1)^3\right].$$

Így a megoldandó egyenletünk:

(9) $$(x+3)^3 + (x+1)^3 = 0.$$

Ezen egyenlet egyik gyökét nyerjük, ha

$$x + 3 = -(x+1), \quad \text{azaz} \quad x = -2.$$

Ha a (9) baloldalát $(x+3) + (x+1)$ tényezőjével osztjuk:

$$(x+3)^2 - (x+3)(x+1) + (x+1)^2 = 0,$$

vagyis

(10) $$x^2 + 4x + 7 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei egyszersmind a (9)-et kielégítik. (10)-ből

$$x = -2 \pm \sqrt{-3}.$$

Lindtner Pál (Ybl Miklós főreál VII. o. Székesfehérvár.)

Jegyzet. A (3a) és (4a) egyenletekben az $\alpha - \beta$ tényezőt elhagytuk, holott $\alpha - \beta = 0$ azaz $\alpha = \beta$ ezen egyenletrendszer egyik megoldása. Azonban $\alpha = \beta$ az (1) …(4) eredeti egyenletrendszert nem elégíti ki; mert ha $\alpha - \beta$, akkor

$$A + B = 1; \quad (A+B)\alpha = 2; \quad (A+B)\alpha^2 = 5; \quad (A+B)\alpha^3 = 14.$$

Ezen egyenletek egyidejűleg nem elégíthetők ki.