

Nevezzük a  $BC$  és  $QR$  egyenesek metszéspontját  $A'$ -nek.

Kimutatható, hogy

$$(C' B' QR) = (PA' QR).$$

Mint hogy az  $A(BCQR)$  sugársor szögei:  $BAP$ ,  $CAQ$ ,  $BAR$  és  $CAR$  rendre egyenlők a  $B(PCQR)$  sugársor szögeivel:  $PBC$ ,  $CBQ$ ,  $PBR$  és  $CBR$  szögekkel, e két sugársor úgy egymásra fektethető, hogy  $B$  az  $A$ -ra jut, és az  $AB$ ,  $AC$ ,  $AQ$  és  $AR$  egyenesek (*nem távolságok*) a  $BP$ ,  $BC$ ,  $BQ$  és  $BR$  egyenesekkel (*nem távolságokkal*) összeesnek.

Vigyünk rá az  $AB$  egyenesre az  $AP_1 = BP$ , az  $AC$  egyenesre az  $AA_1 = BA'$ , az  $AQ$  egyenesre az  $AQ_1 = BQ$  és végre az  $AR$  egyenesre az  $AR_1 = BR$  távolságokat. Ekkor  $P_1$ ,  $A_1$ ,  $Q_1$  és  $R_1$  egy egyenesbe esnek és

$$(P_1 A_1 Q_1 R_1) = (PA' QR).$$

De az előbbi feladat eredménye értelmében

$$(C' B' QR) = (P_1 A_1 Q_1 R_1)$$

tehát

$$(C' B' QR) = (PA' QR).$$

Hasonlóképpen kimutatható az  $A(BCQR)$  és  $C(BPQR)$  sugársorok egybevágóságából, hogy

$$(C' B' QR) = (A' PQR).$$

Keressük már most a  $(PA' QR) = (A' PQR)$  symbolum számértékét. A symbolum értelmezésénél fogva

$$\frac{PQ}{A'Q} : \frac{PR}{A'R} = \frac{A'Q}{PQ} : \frac{AR}{PR}$$

miből

$$\frac{PQ}{A'Q} : \frac{A'Q}{PQ} = \frac{PR}{A'R} : \frac{A'R}{PR}$$

Vagy

$$\frac{PQ^2}{A'Q^2} = \frac{PR^2}{A'R^2}$$

mely egyenlőségből továbbá

$$\left[ \frac{PQ}{A'Q} : \frac{PR}{A'R} \right]^2 = 1$$

és így

$$(PA' QR) = (A' PQR) = \pm 1$$

A két symbolum számértéke azonban csak akkor lehetne egyenlő a *pozitív* egységgel, ha 0 egybeesnék  $R$ -rel. Mint hogy ezen eset általánosságban nem áll fönn, az érték csak a negatív egység lehet.

Vagyis

$$(PA' QR) = (A' PQR) = (C' B' QR) = -1$$

De ez utóbbi egyenletből

$$C'Q : B'Q :: C'R : B'R = -1$$

azaz

$$C'Q : B'Q = C'R : -B'R.$$