

I. Tegyük fel, hogy

$$Y = x + y. \quad 1)$$

Az ellipszis egy pontjának koordinátái közt a következő reláció áll fenn;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad 2)$$

Számítsuk ki 2)-ből y értékét és helyettesítsük az 1)-be; lesz akkor

$$Y = x + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kérdés, mi történik Y -nal, ha x értéke x_0 -tól x_1 -ig növekszik?

Legyen Y_0 és Y_1 az Y értéke $x = x_0$ és $x = x_1$ -nél; akkor az $Y_1 - Y_0$ kifejezés értéke a következő:

$$x_1 - x_0 + \frac{b}{a} \left(\sqrt{a^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2 - x_0^2} \right)$$

vagy

$$x_1 - x_0 - \frac{b}{a} \frac{x_1^2 - x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

mely különbség még a következő alakban írható

$$(x_1 - x_0) \left(1 - \frac{b}{a} \frac{x_1 + x_0}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}} \right)$$

Az $Y_1 - Y_0$ különbség pozitív, zérus vagy negatív, a szerint a mint az

$$\frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0}$$

hányados pozitív, zérus vagy negatív. De ez utóbbi

$$1 - \frac{b}{a} \frac{x_1 + x_0}{\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

az $x_1 - x_0$ különbség bármily csekély, tehát a *zérusnál* is. Ha tehát $x_1 = x_0 = x$ akkor

$$Y' = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} - bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

vagy

$$Y' = \frac{a^4 - (a^2 + b^2)x^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}(a\sqrt{a^2 - x^2} + bx)}$$

Mint hogy x 0 és a határok közt változik, $\sqrt{a^2 - x^2}$ mindig valós és a gyök pozitív értékeinél az Y' nevezője mindig pozitív. Előjele tehát pusztán a számlálótól függ. A számláló nagyobb, egyenlő vagy kisebb a zérusnál, a szerint, a mint

$$x \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Az Y változásainak táblázata tehát a következő:

x	o	$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	a
Y'	$+$	o	$-$
Y	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	a

vagyis, ha az x o -tól $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ -ig növekedik Y b -tól $\sqrt{a^2+b^2}$ -ig szintén növekedik, míg ha x $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ -tól a -ig tovább *növekedik*, Y $\sqrt{a^2+b^2}$ -tól a -ig fogy, vagyis Y -nak $\sqrt{a^2+b^2}$ *maximuma*.

Az M pontot, melynél Y értéke maximum, következőképpen szerkesztjük meg. Legyenek az ellipszis nagy tengelyének végpontjai A és A' , kis tengelyének végpontjai B és B' . Ekkor

$$x_m = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{AB}.$$

Vigyük fel az OB egyenesre az $OD = AB$ hosszúságot és kössük össze D -t A' -tel. A' -ban emeljük merőlegest $A'D$ -re, míg az OB' -et E -ben metszi. OE a keresett x_m távolság.

Ugyanis a $DA'E$ derékszögű háromszögből folyik, miszerint

$$A'O^2 = OD \cdot OE$$

vagyis

$$OE = \frac{A'O^2}{OD} = \frac{a^2}{AB}.$$

II. Tegyük fel, hogy

$$Y = xy. \quad 3)$$

Ezen egyenlet a 2) tekintetbe vételével a következő alakot nyeri:

$$Y = \frac{bx}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

melyből

$$Y' = \lim \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a^2b - 2bx^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ez utóbbinak előjele az

$$\frac{a^2}{2} - x^2$$

előjelétől függ. A következő táblázat mutatja xy változásait:

x	o	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
Y'	$+$	o	$-$
Y	o	$\frac{ab}{2}$	o

Ha $x = x_m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $xy = \frac{ab}{2} = \text{maximum}$. Az x_m szerkesztése igen egyszerű. Az OA felezési pontjából C -ből, mint középpontból leírjuk az $\vec{OC} = AC$ sugarú kört. A C pontban merőlegest emelünk OA -ra. E merőleges és a kör metszéspontjainak bármelyike az O -tól a keresett x_m távolságra van.