Tegyük fel, hogy $DD' = x$. A feladat értelmében fennáll a következő egyenlet:

$$2\pi x^2 + 2\pi x DE = 4\pi R^2$$

vagy

$$x^2 + xDE = 2R^2.$$

Hogy kiszámíthassuk DE értékét, vegyük figyelembe a CDE és CAB hasonló háromszögeket, melyekből következik, hogy

$$\frac{DE}{a} = \frac{h-x}{h}$$

vagy

$$DE = \frac{a(h-x)}{h}$$

A probléma egyenlete tehát a következő:

$$x^2 + \frac{ax(h-x)}{h} = 2R^2 \qquad 1)$$

vagy

$$(a-h)x^2 - ahx + 2hR^2 = 0 \qquad 2)$$

A probléma természetéből következik, hogy x-nek csak oly értékei jöhetnek tekintetbe, melyek valósak, pozitívok és 0 és h között foglaltatnak. Az első feltételt kifejezi az

$$a^2h^2 - 8(a-h)hR^2 \geq 0 \qquad 3)$$

egyenlőtlenség. A második és harmadik feltételt kielégíti egyidejűleg a 2) alatti egyenlet *egy* gyöke, ha

$$f(0) \cdot f(h) < 0 \qquad 4)$$

hol $f(0)$ és $f(h)$ azon értékeket jelentik, melyek a 2) alatti egyenlet baloldalából keletkeznek, ha benne x-et 0, ill. h-val felcserélem; *mind a két* gyöke, ha egyidejűleg fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$f(0) \cdot f(h) > 0 \qquad 5)$$

és

$$0 < \frac{ah}{2(a-h)} < h. \qquad 6)$$

Ha $h \geq a$, az 1) gyökei R bármely értékénél valósak; ha azonban $h < a$, csak akkor, ha

$$R^2 \leq \frac{a^2h}{8(a-h)}$$

E szerint vizsgálatunkban három fő esetet külömböztetünk meg a szerint, amint h nagyobb, egyenlő, vagy kisebb az a-nál.

1^0. $h > a$. – Minthogy $f(0) = 2R^2h$ és $f(h) = h(2R^2 - h^2)$ és a *gyökök félösszege,* $ah : 2(a-h)$ a jelen esetben R bármely értékénél negatív, pozitív gyök csak egy lehetséges, még pedig akkor, ha

$$2R^2h^2(2R^2 - h^2) < 0$$

azaz, ha

$$R^2 < \frac{h^2}{2}$$

2^0. $h = a$. – Ekkor $x = \dfrac{2R^2}{a}$ és ez akkor megfelelő érték, ha kisebb a $h = a$-nál; vagyis, ha

$$R^2 < \frac{a^2}{2}$$

3^0. $h < a$. – A gyökök akkor valósak, ha

$$R^2 \leqq \frac{a^2h}{8(a-h)}$$

Hogy mindkettő, vagy csak egyik felel-e meg a feladatnak, az $f(h)$ előjelétől függ csupán, mert $f(0) > 0$. De

$$f(h) = h(2R^2 - h^2)$$

és a jelen főesetben 3 alesetet külömböztetünk meg a szerint, a mint $f(h) \gtreqless 0$.

Minthogy az $(a-2h)^2 > 0$ feltétlenül fennálló egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{h^2}{2} < \frac{a^2}{8(a-h)}$$

és ha ugyanekkor $f(h) < 0$, azaz

$$R^2 < \frac{h^2}{2}$$

0 és h közé csak egy gyök esik, még pedig minthogy

$$\frac{ah}{2(a-h)} > 0$$

azaz mindkét gyök positiv, a gyökök kisebbike. Ha

$$R^2 = \frac{h^2}{2}$$

akkor

$$f(h) = 0$$

azaz h az 1) alatti egyenlet gyöke és a henger egy $CH = h$ sugarú körlapra redukálódik.

A második gyök ez esetben

$$x_2 = \frac{ah}{a-h} - h = \frac{h^2}{a-h}$$

és csak akkor felel meg, ha kisebb a h-nál, azaz ha

$$\frac{h^2}{a-h} < h$$

$$2h^2 < ah$$

$$h < \frac{a}{2}$$

Ha végre

$$\frac{h^2}{2} < R^2 < \frac{a^2 h}{8(a-h)}$$

két megoldás van, vagy egy sincs, a szerint, a mint

$$\frac{ah}{2(a-h)} <> h$$

azaz

$$h \lesseqgtr \frac{a}{2}$$

Összefoglalás: A problémának *egy* megoldása van, ha

$$R^2 < \frac{h^2}{2},$$

kettő, ha

$$h < \frac{a}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{h^2}{2} \le R^2 \le \frac{a^2 h}{8(a-h)}$$