Első megoldás. 1. Ha $n=1$, akkor
$$5+2\cdot 3^0+1=8$$
osztható 8-cal.

2. $4\cdot 5+4\cdot 3^0=24$ osztható 8-cal, tehát
$$(5+2\cdot 3^0+1)+(4\cdot 5+4\cdot 3^0)=5^2+2\cdot 3+1$$
is osztható 8-cal.

3. Ezt az okoskodást folytatva
$$\left(5^2+2\cdot 3+1\right)+\left(4\cdot 5^2+4\cdot 3\right)=5^3+2\cdot 3^2+1$$
szintén osztható 8-cal.

4. Az indukció teljessége kedvéért tegyük föl, hogy $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ osztható 8-cal. akkor mivel a
$$4\cdot 5^n+4\cdot 3^{n-1}=4\left(5^n+3^{n-1}\right)$$
kifejezés értékében a zárójelben két páratlan szám összege, vagyis páros szám áll. azért $4\cdot 5^n+4\cdot 3^{n-1}$ osztható $4\cdot 2=8$-cal és így
$$\left(5^n+2\cdot 3^{n-1}+1\right)+\left(4\cdot 5^n+4\cdot 3^{n-1}\right)=5^{n+1}+2\cdot 3^n+1$$
szintén osztható 8-cal. Ha tehát a tétel igaz n-re, akkor igaz $(n+1)$-re is; ámde $n=1$, 2-re igaz volt, tehát helyes marad $n=3$-ra, ebből ismét $n=4$-re is és általában n-nek minden pozitív egész számú értékére.

(Engel Sándor, Budapest.)

Második megoldás.

$5\equiv \pmod 8$	$3=3 \pmod 8$
$5^2\equiv 25\equiv 1 \pmod 8$	$3^2\equiv 9\equiv 1 \pmod 8$
$5^3\equiv 5 \pmod 8$	$3^2\equiv 9\equiv 1 \pmod 8$
$5^4\equiv 25\equiv 1 \pmod 8$	$3^3\equiv 3 \pmod 8$
....	....
$5^{2m}\equiv 1 \pmod 8$	$3^{2m}\equiv 1 \pmod 8$
$5^{2m+1}\equiv 5 \pmod 8$	$3^{2m+1}\equiv 3 \pmod 8$

1°. Ha tehát $n=2m$, akkor
$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1\equiv 1+2\cdot 31\equiv 8\equiv 0 \pmod 8.$$

2°. Ha pedig $n=2m+1$, akkor
$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1\equiv 5+2\cdot 1+1\equiv 8\equiv 0(\pmod 8.$$

(Földy Zoltán, Budapest.)

Harmadik megoldás.
$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=(4+1)^n+2(4-1)^{n-1}+1.$$

A $(4+1)^n$ hatványozást elvégezve a binominális-tétel segítségével, az első $(n-1)$ tag mindegyike osztható $4^2=16$-tal, tehát
$$(4+1)^n=16\cdot A+n\cdot 4+1$$
és hasonlóképp
$$(4-1)^{n-1}=4\cdot B+(-1)^{n-1},$$
tehát
$$\begin{aligned}5^n+2\cdot 3^{n-1}+1&=16A+4n+1+8B+2\cdot(-1)^{n-1}+1=\\&=8\cdot C+4n+2\cdot(-1)^{n-1}+2.\end{aligned}$$

a) Ha n páratlan, akkor $(n\pm 1)$ páros, tehát
$$4n+2\cdot(-1)^{n-1}+2=4n+2+2=4(n+1)$$

szintén osztható 8-cal,

b) ha pedig n páros, akkor $(n-1)$ páratlan, tehát

$$4n+2\cdot(-1)^{n-1}+2=4n$$

ismét osztható 8-ca1.

(Klein Pál, Budapest.)

Negyedik megoldás.

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=(4+1)^n+2(2+1)^{n-1}+1.$$

Ámde

$$(4+1)^2=16\cdot A+4n+1,$$
$$(2+1)^{n-1}=4\cdot B+2(n-1)+1,$$

tehát

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=16A+8B+4n+4(n-1)+1+2+1=$$
$$=16A+8B+8n=8\cdot C.$$

(Oszvald Ferenc, Budapest.)

Ötödik megoldás.

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=5\cdot(8-3)^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1.$$

Ámde

$$(8-3)^{n-1}=8\cdot A+(-1)^{n-1}\cdot 3^{n-1},$$

tehát

$$N=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=8\cdot A'+(-1)^{n-1}\cdot 5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1.$$

a) Ha n páratlan, tehát $n-1$ páros, akkor

$$N=8A'+5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1=8\cdot A'+7\cdot 3^{n-1}+1=$$
$$=8A'+(8-1)\cdot 3^{n-1}+1=8A'+8\cdot 3^{n-1}-\left(3^{n-1}-1\right).$$

Feltételünk szerint $n-1=2m$, tehát

$$3^{n-1}-1=9^m-1=(8+1)^m-1=8B+1-1=8B$$

és így

$$N=8A'+8\cdot 3^{n-1}+8B.$$

b) Ha n páros, tehát $n-1$ páratlan, akkor

$$N=8A'-5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1=8A'-3^n+1=8A'-\left(3^n-1\right).$$

Feltételünk szerint $n=2m$, tehát

$$3^n-1=9^m-1=(8+1)^m-1=8B+1-1$$

és így

$$N=8A'-8B.$$

(Okolicsányi Ferenc, Budapest.)

Hatodik megoldás. Legyen

$$S_k=5^k+2\cdot 3^{k-1}+1.$$

akkor $S_1=8,\ S_2=4\cdot 8,\dots$ oszthatók 8-cal. Tegyük fel, hogy S_k is osztható 8-cal és vizsgáljuk meg, hogy S_{k+1} is osztható-e 8-cal?

$$S_{k+1}=5^{k+1}+2\cdot 3^k+1=(4+1)5^k+2\cdot 3\cdot 3^{k-1}+1=$$
$$=5^k+2\cdot 3^{k-1}+1+4\left(5^k+3^{k-1}\right).$$

Ámde a zárójelben álló két páratlan szám összege páros, tehát $4\left(5^k+3^{k-1}\right)$ osztható $4\cdot 2=8$-cal és így S_{k+1} is osztható 8-cal, stb.

(Radó Tibor, Budapest.)

Hetedik megoldás. Segédtétel:

$$x^n=(x-1)\left[(x-1)\cdot E+n\right]+1,$$

ahol x, n és E egész számokat jelentenek.

Bizonyítás.

$$\begin{gathered}x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1\right)=\\=(x-1)\Big[\left(x^{n-1}-1\right)+\left(x^{n-2}-1\right)+\ldots+\left(x^2-1\right)+(x-1)+n\Big].\end{gathered}$$

Ámde $x^{n-1}-1,\ \ x^{n-2}-1,\ \ldots,\ x^2-1,\ x-1$ mindegyike osztható $(x-1)$-gyel, tehát

$$x^n-1=(x-1)\left[(x-1)\cdot E+n\right],$$

vagyis

$$x^n=(x-1)\Big[(x-1)E+n\Big]+1.$$

Segédtételünk szerint

$$\begin{gathered}5^n=4\cdot(4\cdot E_1+n)+1=16\cdot E_1+4n+1,\\2\cdot 3^{n-1}=2\left\{2\cdot(2\cdot E_2+n-1)+1\right\}=8E_2+4n-2,\end{gathered}$$

tehát

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=16E_1+8E_2+8n.$$

(Stojkovits Iván, Budapest.)