Első megoldás. Legyenek a körök középpontjai O_1 és O_2, sugaraik r_1 és r_2, továbbá a belső érintők érintéspontjai C és D, egymással való metszéspontjuk S, a belső érintőknek a külső érintővel való metszéspontjai A és B.

Ha $ABS\sphericalangle = \alpha$, akkor

$$BAS\sphericalangle = 90^\circ - \alpha, \qquad SBO_2\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$BO_2S\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, \qquad SAO_1\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, \qquad AO_1S\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Minthogy

$$AO_1S\Delta \sim BO_2S\Delta,$$

azért

$$\frac{SA}{SO_1} = \frac{SO_2}{SB},$$

vagy

$$SA \cdot SB = SO_1 \cdot SO_2.$$

De az O_1CS és O_2DS háromszögekből

$$SO_1 = r_1\sqrt{2} \qquad \text{és} \qquad SO_2 = r_2\sqrt{2},$$

s így

$$SA \cdot SB = 2r_1r_2,$$

vagy

$$\frac{SA \cdot SB}{2} = r_1r_2.$$

(Bayer Nándor, Losonc.)

Második megoldás.

$$2t = \left(r_1 + r_1\mathrm{tg}\frac{90^\circ - \alpha}{2}\right)\left(r_2 + r_2\mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= r_1r_2\left(1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \mathrm{tg}\ (45^\circ - \frac{\alpha}{2})\right) =$$

$$= r_1r_2\left(1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{\mathrm{tg}\ 45^\circ -\ \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\ 45^\circ\ \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2}} + \frac{\mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{tg}\ 45^\circ - \mathrm{tg}^2\ \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\ 45^\circ\ \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= r_1r_2\left(1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1 -\ \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right) = 2r_1r_2.$$

(Sárközy Pál, Pannonhalma.)

Harmadik megoldás. Ha $AS = a,\ BS = b,\ AB = c$, akkor *(Math. Gyakorlókönyv II. 67.)*

$$r_1 = \frac{t}{s-a}, \qquad r_2 = \frac{t}{s-b},$$

s így

$$r_1r_2 = \frac{t^2}{(s-a)(s-b)} = s(s-c) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{4} = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{4} = \frac{ab}{2}.$$

Ennélfogva az ABS háromszög területe csakugyan r_1r_2.

(Mellinger Endre, Budapest.)