

I. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC háromszög BA oldala mellé B -ben a B_1 szöget és hosszabbítsuk meg a CA oldalt, míg az a B_1 szög másik szárát C' -ben metszi. Így kapjuk a BCC' háromszöget, melyben BA a CBC' szög szögfelezője. Legyen $AC' = b'$ és $BC' = a'$. Mint ismeretes (*K.M.L.V.96.l.*)

$$(1) \quad aa' = bb' + \overline{BA}^2 = c^2 + bb'.$$

De a föltételeknek megfelelő bármely háromszög hasonló az ABC' háromszöggel s így, ha egy ilyen háromszögnek oldalai a_1 , b_1 és c_1 , akkor

$$c : c_1 = b' : b_1 = a' : a_1,$$

miből

$$b' = \frac{cb_1}{c_1} \text{ és } a' = \frac{a_1c}{c_1},$$

mely értékeket (1)-be téve, ered:

$$a \frac{a_1c}{c_1} = c^2 + b \frac{cb_1}{c_1}$$

vagy

$$aa_1 = bb_1 + cc_1.$$

(Bayer Nándor, Losoncz.)

II. megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, & \frac{b_1}{a_1} &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \\ \frac{c}{a} &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, & \frac{c_1}{a_1} &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Eme egyenletekből ered, hogy

$$\frac{bb_1}{aa_1} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}, \quad \frac{cc_1}{aa_1} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha},$$

az utolsó két egyenletet egymáshoz adva,

$$\begin{aligned} \frac{bb_1 + cc_1}{aa_1} &= \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \beta(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

s így

$$bb_1 + cc_1 = aa_1.$$

(Pauli József, Nagykikinda.)