

Induljunk ki az ismert

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

képletből. Jelen esetben

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= x, & \text{tehát} & & \cos \alpha &= \sqrt{1 - x^2}; \\ \sin \beta &= y, & \text{tehát} & & \cos \beta &= \sqrt{1 - y^2}; \end{aligned}$$

és így képletünk így is írható:

$$z = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}.$$

Kétszeri négyzetre emelés után a gyökjel eltűnik és nyerjük az x , y és z közötti, trigonometriai és gyökjelek nélküli kapcsolatot:

$$z^4 - 2z^2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2) + (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Minthogy ez az egyenlet z -re nézve negyedfokú, azért z -nek általában 4 értéke van. 4-nél kevesebb értéket vesz fel, ha

- (1) az egyenlet bal oldala teljes négyzet,
- (2) az abszolút tag = 0,
- (3) z^2 együtthatója = 0,
- (4) az abszolút tag és z^2 együtthatója = 0.

- (1) Az egyenlet többtagúja teljes négyzet, ha

$$4(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)^2$$

vagy

$$(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = 0,$$

amiből

$$4x^2y^2(1 - x^2)(1 - y^2) = 0.$$

Ez az egyenlőség akkor áll fenn, ha:

$$(a) x = 0, \quad (b) x = \pm 1, \quad (c) y = 0, \quad (d) y = \pm 1.$$

Ez esetben z -re két értéket kapunk.

- (2) Az abszolút tag = 0, ha $x = \pm y$, akkor egyenletünk ily alakra hozható

$$z^4 - 4z^2(x^2 - x^4) = 0,$$

amiből

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = 2x\sqrt{1 - x^2}, \quad z_4 = -2x\sqrt{1 - x^2}.$$

Ez esetben tehát z három értéket vesz fel.

- (3) és (4) z^2 együtthatója = 0, ha

$$(1) \quad x^2 - 2x^2y^2 + y^2 = 0$$

Ez az egyenlőség azonban csak akkor állhat fenn, ha

$$x^2 = y^2.$$

- (1) u. i. még a következő alakokra hozható

$$\frac{x^2}{y^2} = 2x^2 - 1 \quad \text{és} \quad \frac{y^2}{x^2} = 2y^2 - 1.$$

Ha már most $x^2 > y^2$, akkor

$$\frac{x^2}{y^2} = 2x^2 - 1 > 1 \quad \text{vagy} \quad x^2 > 1.$$

Ha pedig $y^2 > x^2$, akkor

$$\frac{y^2}{x^2} = 2y^2 - 1 > 1 \quad \text{vagy} \quad y^2 > 1.$$

Ámde az $x^2 > 1$ és $y^2 > 1$ egyenlőtlenségek abszurdumot fejeznek ki, mert feltételünk értelmében x és y , s velük együtt x^2 és y^2 is valódi törtek. Kell tehát, hogy $x^2 = y^2$ legyen. Ezt tekintetbe véve (1)-ből erednek a következő gyökpárok:

$$(a) x = y = 0, \quad (b) x = 1, y = 1, \quad (c) x = 1, y = -1.$$

$$(d) x = -1, y = 1, \quad (e) x = -1, y = -1.$$

Ebben az esetben azonban $(x^2 - y^2)^2 = 0$, tehát az egyenlet a

$$z^4 = 0$$

egyenletre redukálódik, a honnan z egyetlen értéke $z = 0$.

Látnivaló, hogy ez az eset magába foglalja az utolsó esetet is, amikor mind az abszolút tag, mind pedig z^2 együtthatója $= 0$.

Tehát z értékváltozásait a következőkben foglalhatjuk össze:

z -nek általában 4 értéke van, ha azonban

I. $x = \pm y$ és sem x , sem y nem egyenlő 0, vagy ± 1 , akkor z -nek 3 értéke van;

II.

$$(a) x = 0, \quad (b) y = 0,$$

$$(c) x = \pm 1, \quad (d) y = \pm 1,$$

akkor z 2 értéket vesz fel, s

III.

$$(a) x = y = 0, \quad (b) x = 1, y = 1, \quad (c) x = 1 y = -1,$$

$$(d) x = -1, y = 1, \quad (e) x = -1, y = -1,$$

akkor z -nek csak egy értéke van.

(Hajdu Pál, Budapest.)