

1°. Tételünket először abban a speciális esetben akarjuk bebizonyítani, midőn a Q_1, Q_2, Q_3 pontok a $P_1P'_1, P_2P'_2, P_3P'_3$ egyenesek végtelenben fekvő pontjai, tehát Q_1, Q_2, Q_3 pontok rendre felezik a $P_1P'_1, P_2P'_2, P_3P'_3$ diagonálisokat. A bizonyítandó tétel tehát ez esetben:

"A teljes négyszög oldal felezéspontjai egy egyenesben vannak."

Bizonyítás. Jelöljük A, B, C a $P'_2P_3, P_3P'_1$, illetve a $P'_1P'_2$ távolságok felezéspontjait, akkor

$$AB \parallel P'_2P'_1$$

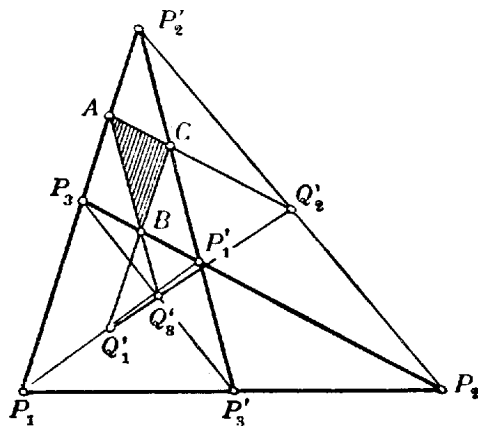
$$(1) \quad BC \parallel P_3P'_2$$

$$CA \parallel P'_1P_3,$$

tehát AB, BC, CA felezik a $P_3P'_3, P_1P'_1$, illetve a $P_2P'_2$ diagonálisokat is, és így átmennek a Q'_3, Q'_1, Q'_2 pontokon.

Már most a $P'_1P'_2P_3$ háromszögnek a $P_1P'_3P_2$ transversálisa, tehát a Menelaos-féle tétel értelmében:

$$(2) \quad \frac{P'_1P'_3}{P'_2P'_3} \cdot \frac{P'_2P_1}{P_3P_1} \cdot \frac{P_3P_2}{P'_1P_3} = 1.$$



Ámde (1) következtében:

$$\frac{P'_1P'_3}{P'_2P'_3} = \frac{BQ'_3}{AQ'_3}$$

$$\frac{P'_2P_1}{P_3P_1} = \frac{CQ'_1}{BQ'_1}$$

$$\frac{P_3P_2}{P'_1P_3} = \frac{AQ'_2}{CQ'_2}$$

amit (1)-be téve nyerjük:

$$(3) \quad \frac{BQ'_3}{AQ'_3} \cdot \frac{CQ'_1}{BQ'_1} \cdot \frac{AQ'_2}{CQ'_2} = 1,$$

ami Menelaos tétele értelmében azt mondja, hogy az ABC háromszög oldalain fekvő Q_1, Q_2, Q_3 pontok egyazon egyenesen vannak.

2°. Az általános esetben felvesszünk a térben egy S pontot és az egész alakzatot egy az (S_p) síkkal párhuzamos síkra vetítjük. E projekcióban a p -nek megfelelő egyenes végtelenbe jut, tehát az előző tétel értelmében a Q'_1, Q'_2, Q'_3 pontok vetületei egyazon egyenesben vannak, amiből azonban máris következik, hogy a Q'_1, Q'_2, Q'_3 maguk is egy egyenesen fekszenek.

(A.)