

Ismeretes, hogy a matematikai valószínűséget a kedvező és az összes lehetséges esetek számának a viszonya adja. Minthogy 1, 2, 3, ..., $n-1$, n golyót húzhatunk, azért a lehetséges esetek száma l , az n elemből alakítható 1-es, 2-es, 3-as, ..., n -es kombinációk összegével egyenlő; tehát

$$l = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Hogy eme összeget meghatározhassuk, legyen az

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

egyenlőségben $a = b = 1$. Ekkor

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

tehát

$$l = 2^n - 1.$$

Határozzuk meg ezek után a kedvező esetek számát. Minthogy 2, 4, 6, ... golyó $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{6}$, ... féleképpen húzható, azért a kedvező esetek száma k , lesz:

$$k = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots$$

Legyen először n páros szám, akkor minthogy

$$(1-1)^n = 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

azért

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-1} = \frac{2^n}{2},$$

tehát

$$k = 2^{n-1} - \binom{n}{0} = 2^{n-1} - 1.$$

Hasonlóképpen, ha n páratlan szám:

$$k' = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n} - \binom{n}{0} = \frac{2^n}{2} - 1 = 2^{n-1} - 1.$$

Látjuk tehát, hogy a kedvező esetek száma mindkét esetben $2^{n-1} - 1$.

Így tehát a keresett valószínűség:

$$v = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n - 1}.$$

A fordított valószínűség, vagyis annak valószínűsége, hogy a húzott golyók száma páratlan:

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n - 1}.$$

Eredményeink mutatják, hogy a páratlan számú golyók húzásának valószínűsége nagyobb. Mindkét valószínűség annál jobban közelíti meg az $\frac{1}{2}$ -et, minél nagyobb n .

(Kürti Imre, Eger.)

A feladatot még megoldották: Bartók I. és Schmidl I. műegyetemi hallgatók, továbbá Ádámffy E., Dömény I., Fodor H., Fuchs I., Haar A., Krampera Gy., Messer P., Pichler S., Rássy P., Schwarz Gy.