

Ha (x_1, y_1) az ellipszis pontja, akkor

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

és az (x_1, y_1) ponthoz tartozó érintő egyenlete

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0.$$

Minthogy valamely (ξ, η) pontnak az $ax + by + c = 0$ egyenlet által kifejezett egyenestől való távolsága

$$m = \frac{a\xi + b\eta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

azért a (O, e) és a $(0, -e)$ pontoknak az (x_1, y_1) ponthoz rajzolt érintőtől való távolsága

$$m_1 = \frac{a^2 y_1 e - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}} \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{a^2 y_1 e + a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}},$$

tehát

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{a^4 (y_1 e - b^2)^2 + a^4 (y_1 e + b^2)^2}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} = 2a^2 \frac{a^2 y_1^2 e^2 + a^2 b^4}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}.$$

De

$$a^2 y_1^2 e^2 + a^2 b^4 = a^2 y_1^2 (a^2 - b^2) + a^2 b^4 = a^4 y_1^2 - b^2 (a^2 b^2 - b^2 x_1^2) + a^2 b^4 = a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2,$$

s így

$$m_1^2 + m_2^2 = 2a^2.$$

(Messer Pál, Budapest.)

Jegyzet. Ha a (ξ, η) pontnak az $ax + by + c = 0$ egyenlet meghatározta egyenes tetszőleges (x, y) pontjától való távolsága r , akkor

$$\begin{aligned} r^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = (\xi - x)^2 + \left(\eta + \frac{ax + c}{b} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{b^2} [x^2 (a^2 + b^2) - 2x(b^2 \xi - ab\eta - ac) + b^2 \xi^2 + (b\eta + c)^2]. \end{aligned}$$

A merőleges távolságot akkor nyerjük, ha r , s vele együtt r^2 minimum, r^2 minimum, ha

$$x = \frac{b^2 \xi - ab\eta - ac}{a^2 + b^2},$$

s ekkor

$$r^2 = \frac{(a\xi + b\eta + c)^2}{a^2 + b^2},$$

vagyis

$$r = \frac{a\xi + b\eta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

A feladatot még megoldották: Csada I., Dövény I., Haar A., Kiss J., Rosenberg J., Sonnenfeld J.