

Mindenekelőtt néhány determinánst számítunk ki, a melyekre szükségünk lesz. Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}$$

Vonjuk ki az utolsó sor elemeit a három első sor megfelelő elemeiből, akkor:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a^3 - d^3 & a^2 - d^2 & a - d & 0 \\ b^3 - d^3 & b^2 - d^2 & b - d & 0 \\ c^3 - d^3 & c^2 - d^2 & c - d & 0 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-d)(b-d)(c-d) \begin{vmatrix} a^2 + ad + d^2 & a + d & 1 \\ b^2 + bd + d^2 & b + d & 1 \\ c^2 + cd + d^2 & c + d & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a-d)(b-d)(c-d) \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-d)(b-d)(c-d) \begin{vmatrix} a^2 - c^2 & a - c & 0 \\ b^2 - c^2 & b - c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \begin{vmatrix} a + c & 1 \\ b + c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d). \end{aligned}$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & 1 \\ 0 & b^2 & b & 1 \\ 0 & c^2 & c & 1 \\ 0 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \\ d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (b-c)(b-d)(c-d) \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a^3 & 1 & a & 1 \\ b^3 & 0 & b & 1 \\ c^3 & 0 & c & 1 \\ d^3 & 0 & d & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a & 1 \\ 0 & b^3 & b & 1 \\ 0 & c^3 & c & 1 \\ 0 & d^3 & d & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b^3 & b & 1 \\ c^3 & c & 1 \\ d^3 & d & 1 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} b^3 - d^3 & b - d & 0 \\ c^3 - d^3 & c - d & 0 \\ d^3 & d & 1 \end{vmatrix} = -(b-d)(c-d) \begin{vmatrix} b^2 + bd + d^2 & 1 \\ c^2 + cd + d^2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -(b-d)(c-d) \begin{vmatrix} b^2 - c^2 + d(b-c) & 0 \\ c^2 + cd + d^2 & 1 \end{vmatrix} = -(b-c)(b-d)(c-d)(b+c+d). \end{aligned}$$

Épp így:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 & 1 \\ b^3 & b^2 & 0 & 1 \\ c^3 & c^2 & 0 & 1 \\ d^3 & d^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b-c)(b-d)(c-d)(bc+bd+cd)$$

és

$$D_4 = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 0 \\ c^3 & c^2 & c & 0 \\ d^3 & d^2 & d & 0 \end{vmatrix} = -(b-c)(b-d)(c-d)bcd.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_1}{D} = \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \\ y &= \frac{D_2}{D} = \frac{b+c+d}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \\ z &= \frac{D_3}{D} = \frac{bc+bd+cd}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \\ u &= \frac{D_4}{D} = -\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}. \end{aligned}$$

(Kürti Imre, Eger.)

A feladatot még megoldották: Ádámffy E., Bartók I., Deutsch E., Deutsch I., Haar A., Hirschfeld Gy., Jánosy Gy., Kertész G., Pichler S., Pivnyik I., Riesz K., Rosenberg J., Schlesinger O., Schwemmer I., Schöffler I., Szücs A., Tandlich E.