

A feladatot először egészen általánosan fogjuk megoldani. Legyenek tehát az adott egyenletek:

$$(1) \quad Ax + By + C = 0$$

és

$$(2) \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

A feladatunkat kielégítő pont koordinátái legyenek x_0 és y_0 , akkor ennek távolsága az (1) egyenestől d , feltéve, hogy C nem pozitív:

$$(3) \quad d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Mikor éri el d eminens értékét? Ugyanakkor, midőn az

$$(4) \quad F = d\sqrt{A^2 + B^2} - C = Ax_0 + By_0$$

függvény.

Mivel az x_0, y_0 pont a (2) ellipsisen fekszik, azért a feladat a következő:

Az x_0, y_0 -nak mely értéke mellett éri el az

$$(4) \quad F = Ax_0 + By_0$$

függvény eminens értékét, feltéve, hogy:

$$(5) \quad b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Már most (5)-ből:

$$y_0 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2},$$

tehát

$$F = Ax_0 \pm \frac{bB}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} = ax_0 + \beta \sqrt{\gamma - x^2},$$

honnan:

$$F^2 = a^2x_0^2 \pm 2\alpha\beta x_0 \sqrt{\gamma - x_0^2} - \beta^2x^2 + \beta^2\gamma.$$

Adjuk ezen egyenlethez a következő egyenlőséget:

$$\left[\beta x_0 \mp \alpha \sqrt{-x_0^2 + \gamma} \right]^2 = \beta^2x^2 \mp 2\alpha\beta x_0 \sqrt{\gamma - x^2} - \alpha^2x^2 + \alpha^2\gamma,$$

akkor:

$$F^2 + \left[\beta x_0 \mp \alpha \sqrt{\gamma - x_0^2} \right]^2 = \gamma(\alpha^2 + \beta^2),$$

miből

$$F = \pm \sqrt{\gamma(\alpha^2 + \beta^2) - \left[\beta x_0 \mp \alpha \sqrt{\gamma - x_0^2} \right]^2}.$$

F tehát akkor éri el eminens értékét, ha

$$\beta x_0 \mp \alpha \sqrt{\gamma - x_0^2} = 0,$$

vagyis midőn:

$$x_0 = \frac{\pm \alpha \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\pm Aa^2}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}}. \quad (\alpha)$$

A hozzátartozó y_0 értékek az (5)-ből adódnak ki, ha oda x_0 értékét betesszük:

$$y_0 = \pm \frac{Bb^2}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}}. \quad (\beta)$$

Tehát két olyan pontunk van, melyre nézve d eminens értékű, úgy mint

$$P_1 \left\{ x'_0 = Aa^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}}; y'_0 = Bb^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}} \right\}$$

$$P_2 \left\{ x_0'' = -Aa^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}}; y_0'' = -Bb^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}} \right\}.$$

A mi esetünkben

$$a = 3, b = 2, A = -1, B = 2,$$

tehát

$$P_1 = \left\{ -\frac{9}{5}; \frac{8}{5} \right\} \quad \text{és} \quad P_2 = \left\{ \frac{9}{5}; -\frac{8}{5} \right\}.$$

Ha az adott egyenes távolsága P_1 -től d_1 és P_2 -től d_2 , akkor (3)-ból:

$$d_1 = \frac{(a^2 A^2 + b^2 B^2) + C\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2}}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{\frac{a^2 A^2 + b^2 B^2}{A^2 + B^2}} + C \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

és

$$d_2 = -\sqrt{\frac{a^2 A^2 + b^2 B^2}{A^2 + B^2}} + C \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Már most a gyökjelek alatt csakis pozitív számok állanak, tehát

$$\sqrt{\frac{a^2 A^2 + b^2 B^2}{A^2 + B^2}} = m > 0$$

és

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = n > 0.$$

C föltételünk szerint negatív szám volt, tehát:

$$-C = c > 0$$

és így

$$d_1 = m - cn$$

$$d_2 = -(m + cn),$$

tehát a d_2 abszolút értéke nagyobb a d_1 abszolút értékénél, vagyis az (x'_0, y'_0) ponthoz minimum, míg az (x''_0, y''_0) ponthoz maximum tartozik.

Ha még az (α) és (β) alatti értékét az x_0 és y_0 -nak megnézzük, észrevevesszük, hogy azokban a C nem fordul elő, vagyis a P_1 és P_2 pontok helyzete C -től független, ellenben $\frac{B}{A}$ -tól függ, mert:

$$x_0 = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \left(\frac{B}{A}\right)^2}} \quad \text{és} \quad y_0 = \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \left(\frac{B}{A}\right)^2}}.$$

És mivel $-\frac{B}{A}$ az adott egyenes iránytényezője, világos, hogy az adott egyenessel párhuzamos minden egyeneshez egyazon P_1 és P_2 pontok tartoznak. Húzzunk most pl. P_1 -en át párhuzamosat az adott egyenessel, mely az ellipsist még egy P'_1 pontban metszi, ekkor P'_1 távolsága az (1) egyenestől szintén d_1 lenne, miből az következne, hogy *két* olyan pontunk van az ellipsisen, melynek távolsága (1)-től minimális, a mi eredményeinkkel ellenkeznék; kell tehát, hogy P'_1 összeessék P_1 -gyel, vagyis P_1 illetőleg a P_2 pontokban az adott egyenessel vont párhuzamosak érintői az ellipsisnek, a mi különben közvetlen úton is kimutatható. Pl. a P_1 -ben vont érintő egyenlete ugyanis:

$$\frac{xx'_0}{a^2} + \frac{yy'_0}{b^2} = 1,$$

a honnan x'_0, y'_0 értékeinek behelyettesítése után:

$$Ax + By = \sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2},$$

tehát ezen érintő iránytényezője is: $-\frac{B}{A}$.

(Antal Márkus.)

Megoldást küldtek be: Ádámffy E., Bartók I., Braun I., Dömény E., Dömény I., Enyedi B., Haar A., Kürti I., Liebner A., Neidenbach E., Pichler S., Rosenberg J., Riesz K., Szombathy J., Szűcs A.