

Segédtelek. Ha az ABC háromszög körül írt kör sugara R , a beírt kör sugara r és a háromszög szögei α , β , γ , akkor a háromszög területe

$$T = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

vagy

$$T = r^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Bizonyítás. (a) Ha a háromszög oldalainak hossza a , b , c , akkor

$$T = \frac{abc}{4R}$$

és mivel

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma},$$

tehát

$$T = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

(b) Másrészt

$$T = \frac{r}{2}(a + b + c),$$

ámde

$$r = \frac{a}{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}},$$

tehát

$$T = r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right).$$

Azonban

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} \right] = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

vagyis tényleg

$$T = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Ezek után áttérhetünk feladatunk megoldására. Legyen az adott ABC háromszög köré írt kör középpontja O és sugara r . Az érintő háromszög csúspontjait pedig A_1 , B_1 , C_1 és szögeit α_1 , β_1 , γ_1 -gyel jelöljük és legyen ABC háromszög területe t , az A_1 , B_1 , C_1 háromszögé pedig T , akkor

$$T = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma_1}{2}$$

és

$$t = 2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Csak az α_1 , β_1 , γ_1 szögeket kell kiszámítanunk. A_1BOC négyszögből (mert $A_1BO \triangleleft$ és A_1CO szögek derékszögek):

$$\alpha_1 + BOC \triangleleft = \alpha_1 + 2\alpha = 180^\circ,$$

tehát

$$\alpha_1 = 2(90^\circ - \alpha)$$

és így

$$T = r^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Már most

$$T : t = r^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma : 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1 : 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Jelen esetben

$$T : t = 1 : 0,219865.$$

(Kiss József, Pápa.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Braun I., Dömény I., Dömény E., Enyedi B., Glück I., Haar A., Jánosy Gy., Kertész G., Kürti I., Liebner A., Messer P., Neidenbach E., Pám M., Pichler S., Pivnyik I., Popoviciu M., Rássy P., Riesz K., Rosenberg I., Schwarz Gy., Sonnenfeld I., Szűcs A., Schwemmer I.