

Legyen az adott háromszög ABC . Jelöljük az egyes oldalak középpontjait A_1, B_1, C_1 -gyel; a magasságok talppontjait A_2, B_2, C_2 -vel és messék a szögfelezők az egyes oldalakat az A_3, B_3, C_3 pontokban. A háromszög (S) súlypontját és a beírt kör (O) középpontját összekötő egyenes a BC, CA, AB oldalakat rendre az L_1, M_1, N_1 pontokban találja, melyeknek az L_2, M_2, N_2 szimmetrikus pontok felelnek meg.

1°. *Segéd-tétel:* Ha az O kör a háromszög oldalait az A_4, B_4 és C_4 pontokban érinti, akkor:

$$A_1 A_2 \cdot A_1 A_3 = \overline{A_1 A_4}^2.$$

Bizonyítás. Írjunk az ABC háromszög köré kört. Mivel mind a BC oldalt merőlegesen felező egyenes, mind az A szög felező egyenese felezik a BC ívet, azért mindkettő a BC ív A' középpontján megy keresztül, miért is

$$A_3 B A' \sphericalangle = B A A' \sphericalangle = \frac{A}{2} \sphericalangle.$$

Tehát

$$A_3 B A' \triangle \sim B A A' \triangle$$

és így

$$A' A_3 : A' B = A' B : A' A$$

vagyis

$$(1) \quad \overline{A' B}^2 = A' A \cdot A' A_3.$$

Ámde

$$O B A' \sphericalangle = B O A' \sphericalangle = \frac{A \sphericalangle + B \sphericalangle}{2}$$

tehát

$$(2) \quad A' B = A' O.$$

A (2)-ből $A' B$ értékét (1)-be téve

$$\overline{A' O}^2 = A' A \cdot A' A_3.$$

Az AA' szögfelező pontjait a BC -re projiciálva nyerjük, hogy

$$\overline{A_1 A_4}^2 = A_1 A_2 \cdot A_1 A_3.$$

Természetesen ugyanezek a viszonyok érvényesek a B_1, B_2, B_3 és a C_1, C_2, C_3 pontokra nézve is.

2°. Tételünket már most így mutathatjuk ki:

Az $A_3 A A_1$ háromszögnek szelője az OS , tehát Menelaos tételénél fogva

$$(3) \quad \frac{A_3 L_1}{A_1 L_1} \cdot \frac{A_1 S}{AS} \cdot \frac{AO}{A_3 O} = 1.$$

Mivel

$$\frac{A_1 S}{AS} = -\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{AO}{A_3 O} = \frac{A_2 A_4}{A_3 A_4},$$

azért a (3) egyenlőség így alakul:

$$\frac{A_3 L_1}{A_1 L_1} = -2 \frac{A_3 A_4}{A_2 A_4}$$

vagy

$$\frac{A_1 L_1 - A_1 A_3}{A_1 L_1} = -2 \frac{A_1 A_4 - A_1 A_3}{A_1 A_4 - A_1 A_2}.$$

A segéd-tétel alkalmazásával

$$\frac{A_1 L_1 - \frac{\overline{A_1 A_4}^2}{A_1 A_2}}{A_1 L_1} = -2 \frac{A_1 A_4 - \frac{\overline{A_1 A_4}^2}{A_1 A_2}}{A_1 A_4 - A_1 A_2},$$

melyet rendezve

$$A_1 L_1 \cdot A_1 A_2 \cdot A_1 A_4 = \overline{A_1 A_4}^3 + 2 \overline{A_1 A_4}^2 \cdot A_1 L_1 - A_1 A_2 (\overline{A_1 A_4}^2 - A_1 A_2 \cdot A_1 L_1 + 2 A_1 A_4 \cdot A_1 L_1)$$

vagy $A_1 A_4$ -gyel osztva:

$$A_1 L_1 \cdot A_1 A_2 = \overline{A_1 A_4}^2 + 2 A_1 A_4 \cdot A_1 L_1 - \frac{A_1 A_2}{A_1 A_4} (\overline{A_1 A_4}^2 - A_1 A_2 \cdot A_1 L_1 + 2 A_1 A_4 \cdot A_1 L_1),$$

innen

$$A_1 L_1 \cdot A_1 A_2 + \overline{A_1 L_1}^2 = \overline{A_1 A_4}^2 + 2A_1 A_4 \cdot A_1 L_1 + \overline{A_1 L_1}^2 - \\ - \frac{A_1 A_2}{A_1 A_4} (\overline{A_1 A_4}^2 + 2A_1 A_4 \cdot A_1 L_1 + \overline{A_1 L_1}^2 - A_1 A_2 \cdot A_1 L_1 - \overline{A_1 L_1}^2),$$

tehát $A_1 L_1$ helyébe $-A_1 L_2$ -t téve

$$-A_1 L_2 (A_1 A_2 - A_1 L_2) = (A_1 A_4 - A_1 L_2)^2 - \frac{A_1 A_2}{A_1 A_4} [(A_1 A_4 - A_1 L_2)^2 + A_1 L_2 (A_1 A_2 - A_1 L_2)]$$

tehát

$$L_2 A_1 \cdot L_2 A_2 = \overline{L_2 A_4}^2 - \frac{A_1 A_2}{A_1 A_4} (\overline{L_2 A_4}^2 - L_2 A_1 \cdot L_2 A_2),$$

miért is

$$\left(\frac{A_1 A_2}{A_1 A_4} + 1 \right) (\overline{L_2 A_4}^2 - L_2 A_1 \cdot L_2 A_2) = 0$$

és így egyszerűsítés után

$$\overline{L_2 A_4}^2 = L_2 A_1 \cdot L_2 A_2$$

épp így

$$\overline{M_2 B_4}^2 = M_2 B_1 \cdot M_2 B_2 \\ \overline{N_2 C_4}^2 = N_2 C_1 \cdot N_2 C_2.$$

Az L_2 , M_2 , N_2 pontok hatványa tehát a Feuerbach-féle és a beírt körre vonatkozólag rendre egyenlők, miért is az L_2 , M_2 , N_2 pontok a két kör hatványvonalán fekszenek. Mivel pedig a Feuerbach-féle kör érinti a beírt és kívül érintő köröket, tehát a hatványvonal egyszersmind a közös érintési pontban vont közös érintő, vagyis a reciprok egyenes a megfelelő érintő kört és a Feuerbach-féle kört tényleg közös pontjukban érinti.

A többi érintőkre tételünket analóg úton bizonyíthatjuk be.

(Riesz Marczel, Győr.)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Deutsch E., Deutsch I., Enyedi B., Haar A., Pivnyik I., Riesz K., Szmodics H.