

Legyen ABC a keresett, $O_1O_2O_3$ pedig az adott körök középpontjai által meghatározott háromszög, s legyenek D , D_1 , E , E_1 , F és F_1 a keletkezett érintési pontok. A keresett terület ekkor

$$T = ADO_1D_1 + BEO_2E_1 + CFO_3F_1 + DEO_2O_1 + E_1F_1O_3O_2 + FD_1O_1O_3 + O_1O_2O_3.$$

De

$$ADO_1D_1 = 2ADO_1 = r_1 \cdot AD = r_1^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2},$$

hasonlóképpen

$$BEO_2E_1 = r_2^2 \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \text{ és } CFO_3F_1 = r_3^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Továbbá

$$DEO_2O_1 = \frac{r_1 + r_2}{2} \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = (r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2},$$

éppen így

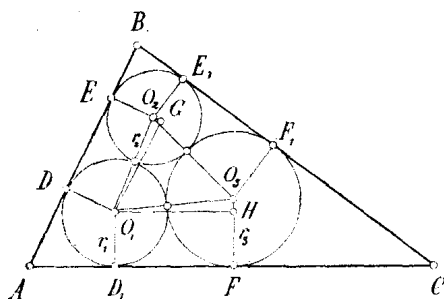
$$E_1F_1O_3O_2 = (r_2 + r_3) \sqrt{r_2 r_3} (r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2} \text{ és } FD_1O_1O_3 = (r_3 + r_1) \sqrt{r_1 r_3}$$

s végre

$$O_1O_2O_3 = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1 r_2 r_3},$$

tehát

$$T = r_1^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + r_2^2 \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + r_3^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \\ + (r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2} + (r_2 + r_3) \sqrt{r_2 r_3} + (r_3 + r_1) \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1 r_2 r_3}.$$



Határozzuk most meg az ABC háromszög egyik, pl. A szögét. Bocsássunk e végből O_1 -ből EO_2 -re és FO_3 -ra merőlegest, miáltal a G és H pontokat kapjuk.

Ekkor

$$A \sphericalangle = O_2O_1O_3 \sphericalangle + O_3O_1H \sphericalangle - O_2O_1G \sphericalangle,$$

hol a jobb oldalon levő szögeket a

$$\sin \frac{O_2O_1O_3}{2} = \sqrt{\frac{r_2 r_3}{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)}},$$

$$\sin O_3O_1H = \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} \text{ és } \sin O_2O_1G = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

képletek szolgáltatják. Teljesen azonos eljárással határozhatjuk meg a B és C szöget is.

A megadott számértékeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T = 1467,5 \text{ mm}^2.$$

(Riesz Kornél, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Deutsch I., Enyedi B., Haar A., Pivnyik I., Prékopa D., Riesz K., Riesz M.