

I. *megoldás.* Az $a^2 - 4b$ az

$$x^2 + ax + b = 0$$

egyenlet diskriminánsa. Ha $a^2 - 4b$ teljes négyzet, akkor a gyökök (x_1 és x_2) egész számok.

Ha ugyanis a páros, akkor és vele együtt $a^2 - 4b$ is páros, tehát $a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$ osztható az x nevezőjében előforduló 2-vel.

Ha pedig a páratlan, akkor $a^2 - 4b$ és vele együtt $\sqrt{a^2 - 4b}$ is páratlan, tehát $a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$ megint páros, vagyis a gyökök ismét egész számok.

És minthogy

$$a = -(x_1 + x_2)$$

és

$$b = x_1 \cdot x_2,$$

tehát

1°.

$$a^2 - 2b = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

és 2°.

$$3ab - a^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 + x_1^3 + 3x_1^2x_2 + x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3.$$

(*Ligeti Pál, Budapest.*)

Hasonló megoldást küldött be: Póka Gy.

II. *megoldás.* Legyen $a^2 - 4b$ az $a - 2b_1$ négyzete, akkor

$$a^2 - 4b = a^2 - 4ab_1 + 4b_1^2$$

vagyis

$$b = ab_1 - b_1^2,$$

tehát

$$a^2 - 2b = a^2 - 2ab_1 + 2b_1^2 = (a - b_1)^2 + b_1^2$$

és

$$3ab - a^3 = 3a^2b_1 - 3ab_1^2 - a^3 = -a^3 + 3a^2b_1 - 3ab_1^2 + b_1^3 - b_1^3 = (-a + b_1)^3 + (-b_1)^3$$

(*Pintér Miksa, Budapest.*)

A feladatot még megoldották: Bartók I., Haar A., Hirschfeld Gy., Kelemen M., Kertész G., Klein A., König D., Pivnyik J., Schmidl I., Schwarz Gy., Tóbiás L., Wohlstein S., Weisz P.