

Segédteétel: Két 0-tól és egymástól különböző α és β egész szám négyzetének különbsége 3 és -3 között nem lehet.

Bizonyítás. Minthogy

$$(-\alpha)^2 - (-\beta)^2 = (-\alpha)^2 - \beta^2 = \alpha^2 - (-\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2,$$

azért tételünket elégséges pozitív α és β számok esetén kimutatni.

1°. Legyen $\alpha > \beta$, akkor

$$\alpha = \beta + \beta',$$

a hol β' 0-tól különböző pozitív egész szám. Ekkor:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\beta + \beta')^2 - \beta^2 = 2\beta\beta' + \beta'^2$$

az $\alpha^2 - \beta^2$ tehát legkisebb, ha β és β' a legkisebb pozitív egész számmal, azaz 1-gyel egyenlők, mikor is

$$\alpha^2 - \beta^2 = 3.$$

2°. Ha $\alpha < \beta$, akkor

$$(\alpha^2 - \beta^2)_{\max} = -(\beta^2 - \alpha^2)_{\min} = -3.$$

I. Legyen a és b legnagyobb közös osztója d , tehát:

$$a = \alpha d \text{ és } b = \beta d,$$

a hol α és β relatív prímszámok, akkor:

$$(I.) \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Ha (I.) egész szám, akkor az 1-gyel nagyobb, illetőleg kisebb

$$(II.) \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} + 1 = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} \text{ és } \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} - 1 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

számok is egészek, vagyis $2\alpha^2$ is, meg $2\beta^2$ is osztható $(\alpha^2 - \beta^2)$ -tel. De α és β és velük együtt α^2 és β^2 is relatív prímszámok, tehát (II.) számok csak akkor lehetnének egészek, ha 2 többszöröse lenne $(\alpha^2 - \beta^2)$ -nek, a mi pedig segédteételünk értelmében, egymástól és 0-tól különböző a és b egész számok esetében, lehetetlen. Tehát a (II.) és velük együtt az (I.) szám sem lehet egész.

(Kőnig Dénes, Budapest.)

A feladatot még megoldotta: Pintér Miksa.

(Mindkét megoldó a segédteételt csak felhasználja, de nem bizonyítja).