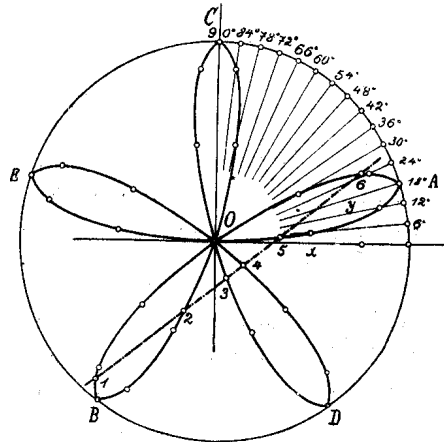


1°. Ha valamely α irányszögnek megfelelő radiusvector r_1 és $\alpha + \pi$ szögnek megfelelő radiusvector r_2 , akkor:

$$r_1 = p \sin 5\alpha \text{ és } r_2 = p \sin(5\alpha + 5\pi) = -\sin 5\alpha.$$

Míthogy azonban α és $\alpha + \pi$ szögek mozgószárai egy egyenesbe esnek, de ellenkező irányúak, azért r_1 és α ugyanazon pontot képviselik, mint r_2 és $(\alpha + \pi)$. Tehát a görbe összes pontjait megszerkeszthetjük, ha ϑ -t 0-tól π -ig változtatjuk

Míg ϑ 0°-tól π -ig változik, addig ötször veszi fel absolut maximális értékét és pedig ha: $\sin 5\vartheta = \pm 1$, vagyis ha $\vartheta = 18^\circ, 54^\circ, 90^\circ, 126^\circ, 162^\circ$, a mikor ugyanis $r = p, -p, p, -p, p$. Tehát a görbének összesen 5 pontja közös a sarkból p sugárral rajzolt körrel. A görbe többi pontjai a körön belül vannak. $p = 0$, ha $\sin 5\vartheta = 0$, vagyis ha $\vartheta = 0^\circ, 36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ, 180^\circ$.



Míg ϑ 0°-tól 18°-ig növekedik, addig $\sin 5\vartheta$ növekedésével r is nő s ha $\vartheta = 18^\circ$, akkor r eléri maximumát. Míg ϑ 18°-tól 36°-ig nő, addig $\sin 5\vartheta$, s vele együtt r is fogy, végre $\vartheta = 36^\circ$, akkor $r = 0$, vagyis a sarkba esik.

Vizsgáljuk most meg, nincs-e valami összefüggés a 0° és 36° közti irányszögnek megfelelő radius vector és az öt 36°-ra kiegészítő szögnek megfelelő radius vector között?

Legyen tehát a szög α , radius vectora r_1 , öt 36°-ra kiegészítő szöge $36^\circ - \alpha$, s ennek radius vectora r_2 , akkor $r_1 = p \sin 5\alpha$, $r_2 = p \sin(180^\circ - 5\alpha) = p \sin 5\alpha$, vagyis: míg ϑ 0°-tól 36°-ig nő, addig oly görbét nyerünk, a mely a $\frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$ -nak megfelelő radius vectorra, mint tengelyre symmetrikus. Hogy a görbe több pontját nyerhessük legyen $\vartheta = 0^\circ, 6^\circ, 12^\circ, 18^\circ, 24^\circ, 32^\circ, 36^\circ$, akkor $r = 0, \frac{p}{2}, \frac{p}{2}\sqrt{3}, p, \frac{p}{2}\sqrt{3}, \frac{p}{2}, 0$. Eme sarkkoordinaták által meghatározott pontok OA görbén vannak.

Míg ϑ 36°-tól 72°-ig változik, addig $\sin 5\vartheta$ mindig negatív lévén r is negatív, tehát ha $\vartheta, 36^\circ, 42^\circ, 48^\circ, 54^\circ, 60^\circ, 72^\circ$, akkor $r = 0, -\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}\sqrt{3}, -p, -\frac{p}{2}\sqrt{3}, -\frac{p}{2}, 0$, s a görbe BO lesz.

Míg ϑ 72°-tól 108°-ig változik, addig $\sin 5\vartheta$ pozitív, s így r is pozitív, míg ϑ 108°-tól 144°-ig nő, addig $\sin 5\vartheta$ negatív lévén r is negatív, s végül míg ϑ 144° – 180°-ig nő, addig $\sin 5\vartheta$ s így r is pozitív. Az előbbi két szerkesztéshez hasonlóan nyerjük OC, OD és OE görbéket, a melyek mindegyike ugyanoly tulajdonságú, mint OA görbe.

Tehát az adott egyenlet görbéje a sarkból p sugárral rajzolt körben levő ABCDEO csillagidom.

Megjegyzendő azonban, hogy AOB, BOC, COD, DOE és EOA nem körívek.

2°. Hogy a görbe egyenletét derékszögű koordinátákban kifejezhessük, alkalmaznunk kell az adott egyenletben a poláris és a derékszögű koordináták között fennálló következő összefüggéseket:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Eme értékeket megadott egyenletünkbe téve és a könnyen igazolható

$$\sin 5\vartheta = 5 \sin \vartheta - 20 \sin^3 \vartheta + 16 \sin^5 \vartheta$$

képletet alkalmazva, kapjuk:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5p \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 20p \frac{y^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} + 16 \frac{y^5}{(\sqrt{x^2 + y^2})^5},$$

miből ered:

$$(x^2 + y^2)^3 = py(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)$$

vagy

$$x^6 - 5px^4y + 3x^4y^2 + 10px^2y^3 + 3x^2y^4 - py^5 + y^6 = 0.$$

(Szmodics Hildegárd, Kaposvár.)

A feladatot még megoldották: Aczél F., Bartók I., Jánosy I., König D., Pilcz P., Pintér M.