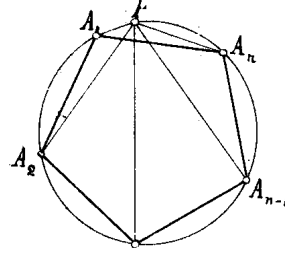


Jelöljük PA_1A_2 háromszög területét t_1 -gyel, a $PA_2A_3\Delta$ -ét t_2 -vel, $PA_{n-1}A_n\Delta$ -ét t_{n-1} -gyel, $PA_nA_1\Delta$ -ét t_n -nel, hol e területek, minthogy a P -nél fekvő szögek α -val egyenlők,

$$t_1 = \frac{1}{2} \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} \sin \alpha, \quad t_2 = \frac{1}{2} \overline{PA_2} \cdot \overline{PA_3} \sin \alpha,$$

$$t_{n-1} = \frac{1}{2} \overline{PA_{n-1}} \cdot \overline{PA_n} \sin \alpha \text{ és } t_n = \frac{1}{2} \overline{PA_n} \cdot \overline{PA_1} \sin \alpha.$$



Carnot tétele alapján:

$PA_1A_2\Delta$ -ből:

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + 2\overline{PA_1}\overline{PA_2} \cos \alpha$$

$PA_2A_3\Delta$ -ből:

$$\overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + 2\overline{PA_2}\overline{PA_3} \cos \alpha$$

...

$PA_{n-1}A_n\Delta$ -ből:

$$\overline{PA_{n-1}}^2 + \overline{PA_n}^2 = \overline{A_{n-1}A_n}^2 + 2\overline{PA_{n-1}}\overline{PA_n} \cos \alpha.$$

$PA_nA_1\Delta$ -ből:

$$\overline{PA_n}^2 + \overline{PA_1}^2 = \overline{A_nA_1}^2 - 2\overline{PA_n}\overline{PA_1} \cos \alpha.$$

Eme egyenlőségeket összeadva :

$$2 \left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 \right) = n\overline{A_1A_2}^2 + 2 \cos \alpha (\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} + \overline{PA_2} \cdot \overline{PA_3} + \dots + \overline{PA_{n-1}}\overline{PA_n} - \overline{PA_n}\overline{PA_1})$$

$$2 \left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 \right) =$$

$$n\overline{A_1A_2}^2 + + \frac{4 \cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{2} \overline{PA_1}\overline{PA_2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \overline{PA_2}\overline{PA_3} \sin \alpha + \dots + \frac{1}{2} \overline{PA_{n-1}}\overline{PA_n} \sin \alpha - \frac{1}{2} \overline{PA_n}\overline{PA_1} \sin \alpha \right)$$

$$2 \left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 \right) = n\overline{A_1A_2}^2 + 4 \operatorname{ctg} \alpha (t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} - t_n).$$

De $t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} - t_n = T_n$ a szabályos sokszög területével. Tehát

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 = \frac{1}{2} (n\overline{A_1A_2}^2 + 4 \operatorname{ctg} \alpha T_n) = \text{const.}$$

(Bayer Béla, Losoncz.)

Jegyzet. Ha a köré írható kör sugara r , a sokszög egy oldala

$$A_1A_2 = 2r \sin \alpha$$

és területe

$$T_n = n \frac{\overline{A_1A_2}^2}{4 \operatorname{tg} \alpha} = nr^2 \sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha \text{ és } 4 \operatorname{ctg} \alpha T_n = 4nr^2 \cos^2 \alpha,$$

akkor

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots + \overline{PA_n}^2 = \frac{1}{2} [4nr^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)] = 2nr^2.$$

Ha n páros, a bizonyítás egyszerűbb. Ugyanis megrajzolva P diametrál pontját, P_1 -et

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{P_1A_1}^2 = 4r^2$$

$$\overline{PA_2}^2 + \overline{P_1A_2}^2 = 4r^2$$

$$\left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots \overline{PA_n}^2\right) + \left(\overline{P_1A_1}^2 + \overline{P_1A_2}^2 + \dots \overline{P_1A_n}^2\right) = 4nr^2.$$

De

$$PA_1 = P_1A_{\frac{n}{2}+1}, \quad PA_2 = P_1A_{\frac{n}{2}+2}, \quad \dots, \quad PA_n = P_1A_{\frac{n}{2}}$$

és így a bal oldalon álló két összeadandó egyenlő lévén

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \dots \overline{PA_n}^2 = 2nr^2.$$

A feladatot még megoldották: Bartók I., Kertész F., König D., Lázár L., Messik G., Lukhaub Gy., Sasvári J., Tóbiás L., Wohlstein S.