

1°. Legyen a derékszögű négyszög $A_1A_2A_3A_4$ és a másik négyszög $B_1B_2B_3B_4$, úgy, hogy $B_1B_3 \perp A_1A_3$ és $B_2B_4 \perp A_2A_4$.

B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_4 és B_4B_1 , A_1A_2 -t C_1 , D_1 , E_1 és F_1 pontokban metszik, A_2A_3 -t F_2 , E_2 , D_2 és C_2 pontokban, A_3A_4 -t E_3 , F_3 , C_3 és D_3 pontokban s végre A_4A_1 -t D_4 , C_4 , F_4 és E_4 pontokban.

B_2A_3 , A_1A_2 -t G_1 -ben A_4A_1 -t G_4 -ben és A_1B_4 , A_2A_3 -t G_2 -ben és A_3A_4 -t G_3 -ban metszi.

A $B_1B_2B_4A_3$ húrnégyszögben:

$$B_1B_2A_3\angle = B_1B_4A_3\angle = \alpha;$$

minthogy pedig

$$\widehat{B_1A_3} = \widehat{A_3B_3},$$

azért

$$B_1B_2A_3\angle = A_3B_2B_3\angle = \alpha$$

és

$$B_1B_4A_3\angle = A_3B_4C_3\angle = \alpha$$

Hasonlóan

$$A_1B_2B_3\angle = A_1B_2C_1\angle = \beta,$$

és

$$A_1B_4B_3\angle = A_1B_4B_1\angle = \beta.$$

Így tehát C_4 , D_4 , A_1 és G_4 pontok harmonikus pontok, mert a $C_4B_2D_4$ háromszög B_2C_4 és B_2D_4 oldalainak és a B_2A_1 és B_2G_4 belső s külső szögfelezőknek a talppontjait képezik.

Hasonlóan C_2 , D_2 , G_2 és A_3 pontok szintén harmonikus pontok s mivel az egyes szeletek fölött is ugyanakkora szögek fekszenek, mint az előbbi háromszögnél s minthogy továbbá az A_1A_4 , és A_2A_3 hordozók párhuzamosak, azért e pontsorok perspektivikusak is, vagyis:

$$(C_4D_4A_1G_4) = (C_2D_2A_3G_2).$$

De

$$(C_4D_4A_1G_4) = (D_1C_1A_1G_1)$$

és

$$(C_2D_2A_3G_2) = (D_3C_3A_3G_3),$$

mert A_1 , ill. A_3 pontjuk közös és a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy-egy pontban jönnek össze. Ebből pedig az következik, hogy mind a négy harmonikus pontsor perspektivikus helyzetű s így 4–4 megfelelő pont C_1 , C_2 , C_3 és C_4 ; D_1 , D_2 , D_3 és D_4 egy-egy egyenesen fekszik.

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy E_1 , E_2 , E_3 és E_4 ; F_1 , F_2 , F_3 és F_4 pontok szintén egy-egy egyenesen vannak.

2°. A feladat első részéből folyik, hogy a $\overline{C_1C_4}$, $\overline{D_1D_4}$, $\overline{A_1B_4}$ és $\overline{A_3B_2}$ egyenesek, mint perspektivikus pontsorok megfelelő pontjait összekötő sugarak egy ugyanazon A pontban metszik egymást. Hasonlóképpen $\overline{E_1E_4}$, $\overline{F_1F_4}$, $\overline{A_1B_2}$ és $\overline{A_3B_4}$ egyenesek szintén egy pontban (Y) találkoznak.

Jelöljük az $A_1B_2A_3B_4$ húrnégyszög A_1A_3 és B_2B_4 átlóinak metszéspontját Z -vel.

A teljes négyszög elméletéből tudjuk, hogy XYZ háromszög az $A_1B_2A_3B_4$ négyszög diagonálháromszöge, a melynek azon fontos tulajdonsága van, hogy bármelyik csúcsának polárisa a szemközt fekvő oldal. Így tehát X pont polárisa tényleg átmegy Y ponton, vagyis az E_1E_4 és F_1F_4 , egyenesek metszéspontján, Y pont polárisa pedig keresztülmegy X ponton, vagyis az C_1C_4 és D_1D_4 egyenesek metszéspontján.

Hasonlóképpen bizonyítjuk a többi esetet is.

(Krisztián György, Pécs.)

A feladatot még megoldották: Krausz B., Luckhaub Gy., Sasvári G.