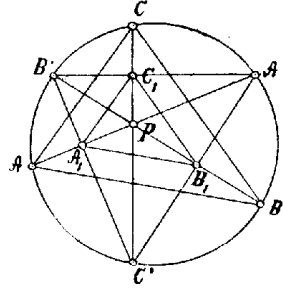


(1°) Az ABC háromszög belső szögfelezői P pontban metszik egymást.



Az ábra mutatja, hogy

$$\begin{aligned} A'C'C\angle + CC'B'\angle + BB'C'\angle &= A'AC\angle + CBB'\angle + BCC'\angle = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

s így

$$C'B_1B'\angle = 90^\circ.$$

Mínthogy továbbá

$$BC'A'\angle = BAA'\angle = \frac{\alpha}{2} = A'AC\angle = A'C'C\angle,$$

azért

$$BB_1 = PB_1,$$

vagyis

$$PB = 2PB_1;$$

hasonlóképp

$$PA = 2PA_1 \quad \text{és} \quad PC = 2PC_1.$$

Mínthogy tehát az A_1 , B_1 , C_1 pontok az AP , BP , CP távolságokat ugyanazon arányban osztják, azért $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1$ s így $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$. Ennélfogva

$$K = AB + AC + BC = 2A_1B_1 + 2A_1C_1 + 2B_1C_1 = 2K_1,$$

miből

$$K_1 = \frac{1}{2}K.$$

Hasonlóképp:

$$K_2 = \frac{1}{2}K_1, \quad K_3 = \frac{1}{2}K_2, \quad \dots$$

s így az ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \dots$ háromszögek kerületeinek összege:

$$S_1 = \frac{K}{1 - \frac{1}{2}} = 2K.$$

Mínthogy továbbá

$$T : T_1 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = 4\overline{A_1B_1}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = 4 : 1,$$

azért

$$T_1 = \frac{1}{4}T,$$

hasonlóképp

$$T_2 = \frac{1}{4}T_1, \quad T_3 = \frac{1}{4}T_2, \quad \dots$$

a miért is az említett háromszögek területeinek összege:

$$S_2 = \frac{T}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}T.$$

(2°) A 275. feladat alapján (K.M.L.IV.100.l.)

$$T = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

ennélfogva

$$\begin{aligned} T' &= 2R^2 \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \\ &= 2R^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned} \frac{T}{T'} &= \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \\ &= 8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

(3°)

$$\begin{aligned} r : r' &= \frac{T}{s} : \frac{T'}{s'} = \frac{\frac{abc}{4R}}{a+b+c} : \frac{\frac{a'b'c'}{4R}}{a'+b'+c'} = \\ &= abc(a' + b' + c') : a'b'c'(a + b + c). \end{aligned}$$

(Filkorn Jenő, Nyitra.)

A feladatot még megoldották: Bertrám J., Czank K., Freibauer E., Krausz B., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Lupsa Gy., Messik G., Messik V., Oltay K., Sasvári G., Szabó J.