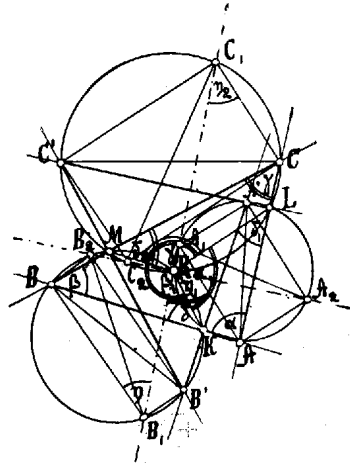


I. Megoldás. 1°. Rajzoljunk a feladatban megnevezett derékszögű négyszögek köré köröket.



1. ábra

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy e körök egy közös R pontban metszik egymást; ugyanis – miután a félkörben fekvő szög derékszög – a K , L és M pontok is a körökön fekszenek s így az $AKRL$ és $BKRM$ húrnégyszögekből $\alpha_1 = 2R - \alpha$; $\beta_1 = 2R - \beta$, tehát $\gamma_1 = 4R - \alpha_1 - \beta_1 = \alpha + \beta$; ennél fogva

$$\gamma + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 2R,$$

mely egyenlet annak a feltétele, hogy a $CLRM$ négyszög is húrnégyszög, a miért is a három kör csakugyan R pontban metszi egymást.

Ugyancsak a fent említett húrnégyszögekből következik, hogy

$$(1) \quad \delta = \delta_1 = \delta_2$$

s miután

$$(2) \quad \eta = \delta, \quad \eta_1 = \delta_1 \text{ és } \eta_2 = \delta_2$$

mint ugyanazon íven fekvő kerületi szögek, azért az (1) és (2)-ből közvetlenül látható, hogy:

$$\eta = \eta_1 = \eta_2.$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, akkor világos, hogy az η , η_1 és η_2 szögek váltó, illetve megfelelő szögek s így az A_1 , B_1 és C_1 pontok egy az R ponton átmenő egyenesen fekszenek.

2°. Az A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 átlók egyszersmind a megfelelő körök átmérőit, minélfogva:

$$A_1RA_2 \sphericalangle = B_1RB_2 \sphericalangle = C_1RC_2 \sphericalangle = 90^\circ,$$

a miből folyólag az A_2 , B_2 és C_2 pontok is egy az R ponton átmenő és az $A_1B_1C_1$ egyenesre merőlegesen álló egyenesen vannak.

(Devecis del Vecchio Mihály, műegyetemi hallgató, Budapest.)

II. Megoldás. Ha $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$ és $AC \perp A'C'$, akkor

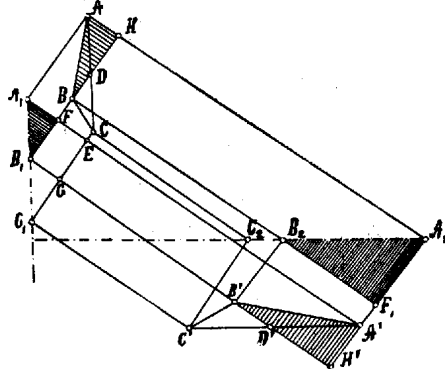
$$ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta,$$

mert szögeik szárai egymásra merőlegesek s így a megfelelő szögek egyenlők.

Mutassuk ki mindenekelőtt azt, hogy ha az $ABC\Delta$ csúcsain át bármily irányban párhuzamosokat húzunk és ezekre az $A'B'C'\Delta$ csúcsaiból merőlegeseket bocsátunk, akkor a megfelelő egyenesek A_1 , B_1 és C_1 metszéspontjai egy egyenesen fekszenek.

Legyen $(BB_1, AC) \equiv D^1$ és $(B_1B', A'C') \equiv D'$.

¹ D pont a BB_1 és AC egyenesek metszéspontja.



2. ábra

Minthogy $ADB \sphericalangle = A'D'B' \sphericalangle (\perp \text{ szárú szögek})$, azért

$$ABD \triangle \sim A'B'D' \triangle$$

s így

$$(1) \quad AD : AC = A'D' : A'C'.$$

Ha továbbá $(A_1A', CC_1) \equiv E$, $(A_1A', BB_1) \equiv F$ és $(B_1B', CC_1) \equiv G$, akkor

$$(2) \quad AD : AC = A_1F : A_1E$$

és

$$(3) \quad A'D' : A'C' = EG : EC_1$$

s minthogy továbbá $EG = FB_1$, azért (2) és (3) tekintetbe vételével (1) így alakul

$$A_1F : A_1E = FB_1 : EC_1,$$

a mi kritériuma annak, hogy az A_1 , B_1 és C_1 pontok egy egyenesben vannak.

Egészen hasonlóan bizonyítjuk, hogy A_2 , B_2 és C_2 pontok is egy egyenesben fekszenek.

Ha $(BB_1, AA_2) \equiv H$, $(B_1B', A_2A') \equiv H'$ és $(BB_2, A'A_2) \equiv F_1$, akkor

$$ABH \triangle \sim A'B'H' \triangle,$$

mert

$$ABH \sphericalangle = A'B'H' \sphericalangle$$

s így

$$(4) \quad AH : A'H' = BH : B'H'.$$

De $AH = A_1F$, $A'H' = B_1F$, $BH = A_2F_1$, $B'H' = B_1F_1$, tehát (4) így alakul:

$$A_1F : B_1F = A_2F_1 : B_2F_1,$$

a miből következik, hogy

$$A_1B_1F \triangle \sim A_2B_2F \triangle$$

Minthogy pedig e két háromszög két pár oldala egymásra merőleges, azért a harmadik oldalpár is merőleges egymásra, vagyis $\overline{A_1B_1C_1} \equiv \overline{A_2B_2C_2}$.

(Krisztián György, Pécs.)

A feladatot még megoldották: Kohn B., Prohászka J., Spitzer Ö., Weisz J. egyetemi hallgatók; továbbá: Fülkőrn J., Klein A., Krausz B., Lukhaub Gy., Lupsa Gy., Messik G., Sasvári J., Selényi M., Spitzer H.