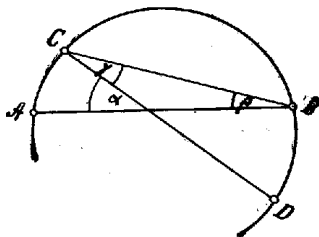


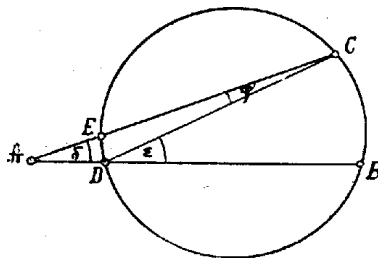
Bizonyításunkban a következő segédteteleket alkalmazzuk:

1. Az AB és DC húrok által bezárt α szög ama kerületi szögek összegével egyenlő, melyek az AC és BD ívekhez tartoznak: $\alpha = \beta + \gamma$.



Ennélfogva az α szög mértéke: $\frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$.

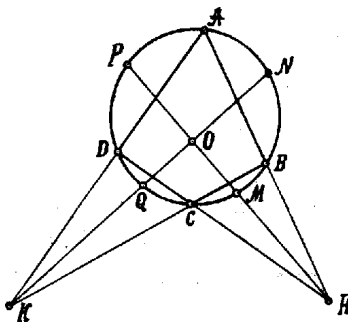
Az AB és AC szelők által bezárt δ szög ama kerületi szögek különbségével egyenlő, melyek a BC és DE ívekhez tartoznak: $\delta = \varepsilon - \varphi$.



Ennélfogva a δ szög mértéke $\frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{DE})$.

2. Minden húrnégyszögben a szemben fekvő oldalak metszéspontjaiból rajzolt szögfelezők egymásra merőlegesek.

Bizonyítás. Az $ABCD$ húrnégyszög szemközti fekvő oldalainak H és K metszéspontjaiban rajzolt KN és HP szögfelezők egymást O -ban metszik.



Mint hogy HP felezi az AHD szöget, azért

$$(1) \quad \widehat{AP} - \widehat{BM} = \widehat{DP} - \widehat{CM}$$

hasonlóképpen

$$(2) \quad \widehat{AN} - \widehat{DQ} = \widehat{BN} - \widehat{CQ}$$

E két egyenletet összeadva:

$$\widehat{PN} - \widehat{DQ} - \widehat{BM} = \widehat{BN} + \widehat{DP} - \widehat{MQ}$$

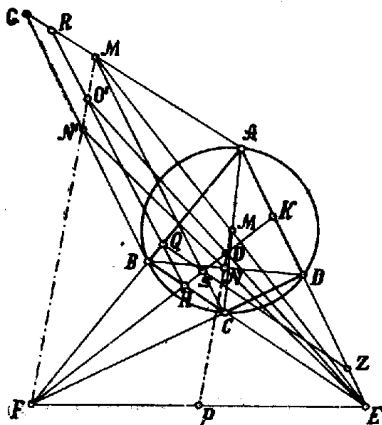
vagy

$$\widehat{PN} + \widehat{MQ} = \widehat{PQ} + \widehat{MN}$$

A PON és MON szögek tehát egyenlők, mert mindeketőnek mértéke ugyanaz s így $\overline{HO}$ merőleges $\overline{KO}$ -ra.

3. Minden teljes négyszögben az átlók felező pontjai egy egyenesen fekszenek.

Bizonyítás. Legyenek az átlók felezőpontjai M , N és P ; a kérdéses szögfelezők egymást 0-ban metszik. Hosszabbítsuk meg $\overline{EM}$ -et $\overline{EO}$ -t és $\overline{EN}$ -et saját hosszúságaikkal M' , O' és N' pontokig.



$\overline{AM'}$ és $\overline{BN'}$ egymást G -ben metszik. $\overline{FO}$ $\overline{BC}$ -t H -ban, $\overline{AD}$ -t K -ban metszi. $\overline{O'H}$ $\overline{AB}$ -t Q -ban, $\overline{AG}$ -t pedig R -ben metszi. Rajzoljunk Q -ból $\overline{BE}$ -vel párhuzamost, mely $\overline{HK}$ -t S -ben $\overline{AE}$ -t pedig Z -ben metszi.

Az $\overline{FD}$ által metszett ABE háromszögre a *Menelaos*-féle tételt (K.M.L.IV.148.l.) alkalmazva:

$$(1) \quad \frac{CB \cdot DE \cdot FA}{CE \cdot DA \cdot FB} = 1.$$

De $BCM'G$, $BEDN'$, $CEAM'$ és $ADN'G$ négyszögek egyenközények s így

$$BC = M'G, \quad DE = N'B,$$

$$CE = M'A \quad \text{és} \quad DA = N'G$$

mit (1)-be téve:

$$(2) \quad \frac{M'G \cdot N'B \cdot FA}{M'A \cdot N'G \cdot FB} = 1.$$

Tehát M', N' és F egy egyenesen fekszenek, következésképpen M , N és P pontok is egy egyenesen fekszenek.

Eme tételekkel feladatunk a következőképpen oldható meg:

Alkalmazzuk a Menelaos-féle tételt az FK egyenes által metszett AZQ háromszögre:

$$(3) \quad \frac{FA \cdot KZ \cdot SQ}{FQ \cdot KA \cdot SZ} = 1.$$

De $KZQO'$, $SQRM'$, $AKO'R$ és $ZSM'A$ négyszögek egyenközények s így

$$KZ = O'Q, \quad SQ = M'R, \quad KA = O'R \quad \text{és} \quad SZ = M'A$$

Eme egyenlőségeket (3)-ba téve:

$$(4) \quad \frac{FA \cdot O'Q \cdot M'R}{FQ \cdot O'R \cdot M'A} = 1.$$

Tehát $M'O'$ és F pontok s így egyúttal M , O és P pontok is egy egyenesen fekszenek. Minthogy pedig az MP és OP egyeneseknek két pontja összeszik, azért az M , O , N és P pontok valóban egy egyenesen fekszenek.

(Krisztián György, Pécs.)

A feladatot még megoldották: Kornis Ö., Krausz B., Lukhaub Gy., Sasvári G.