

Jelöljük azon pontokat, melyek az ABC háromszög oldalait a $p : q$ arányban osztják M , N , P -vel; az APN háromszög területét T_A -val, BMP -ét T_B -vel, CMN -ét T_C -vel, ABC -ét T -vel és MNP -ét T_1 -gyel; akkor

$$AP = AB \frac{p}{p+q}, \quad AN = AC \frac{q}{p+q},$$

tehát

$$T_A = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} \cdot \frac{pq}{(p+q)^2} = T \cdot \frac{pq}{(p+q)^2}.$$

Látjuk, hogy az APN háromszög területe az ABC háromszög oldalaitól független, miért is ugyanazon kifejezés adja a T_B és T_C háromszögek területeit is. Így tehát

$$T_1 = T \left(1 - \frac{3pq}{(p+q)^2} \right)$$

hasonlóképpen

$$T_2 = T_1 \left(1 - \frac{3pq}{(p+q)^2} \right) = T \left(1 - \frac{3pq}{(p+q)^2} \right)^2, \text{ stb.}$$

A háromszögek területei tehát végtelen mértani sort alkotnak, melynek hányadosa $1 - \frac{3pq}{(p+q)^2}$; így tehát a területek összege

$$(1) \quad S = T \frac{(p+q)^2}{3pq}.$$

Jelöljük ama pontokat, melyek az $ABCD$ négyszög oldalait a $p : q$ arányban osztják M , N , P , Q -val; a négyszög csúcsainál fekvő háromszögek területeit t_a , t_b , t_c , t_d -vel; az eredeti négyszög területét t -vel, az $MNPQ$ -ét t_1 -gyel. Rajzoljuk meg a négyszög átlóit s jelöljük az ABC háromszög területét t_A -val, az ADC -ét t_B -vel stb. Ekkor az előbbiek értelmében:

$$t_a = t_A \cdot \frac{pq}{(p+q)^2}, \quad t_b = t_B \cdot \frac{pq}{(p+q)^2}, \quad \text{stb.}$$

Tehát

$$t_1 = t - 2t \frac{pq}{(p+q)^2} = t \left(1 - \frac{2pq}{(p+q)^2} \right).$$

A négyszögek területei ismét végtelen mértani haladványt alkotnak, melynek összege:

$$(2) \quad s = t \frac{(p+q)^2}{2pq}$$

(1) és (2)-ből

$$S : s = \frac{T}{3} : \frac{t}{2}.$$

De

$$T : t = 3 : 2$$

s így

$$S : s = 1 : 1.$$

(Krausz Béla.)

A feladatot még megoldották: Filkorn J., Freibauer E., Kornis Ö., Krisztián Gy., Lukhaub Gy., Sasvári G., Weisz J.